

0060_Primo risultato: la dilatazione dei tempi

Dimostriamo adesso ciò che intuì Einstein sulla dilatazione del tempo, facendo ricorso solamente...al teorema di Pitagora! Oltre all'enunciato del noto teorema (la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è pari all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa), di seguito basterà tener presente solamente due cose:

1. Che per il principio di equivalenza la velocità della luce deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. Che in sistemi di riferimento differenti il tempo possa scorrere in modo differente

Per prima cosa dobbiamo immaginare di costruire un cosiddetto "light-clock" (orologio a luce), il cui funzionamento molto semplice è illustrato nella figura successiva: si tratta di un semplice dispositivo sorgente-ricevitore di impulsi luminosi: la sorgente emette un segnale di luce che percorre una distanza H prima di arrivare al ricevitore, dove viene catturato. Ogni volta che la luce arriva al ricevitore, l'orologio a luce sul ricevitore stesso compie uno scatto dell'unità temporale ($\Delta t'$), che vale:

$$\Delta t' = \frac{H}{c} \text{ è l'incremento di tempo segnato}$$

Di conseguenza si può invertire la relazione per esplicitare la dipendenza di H dall'incremento di tempo:

$$H = c \cdot \Delta t'$$

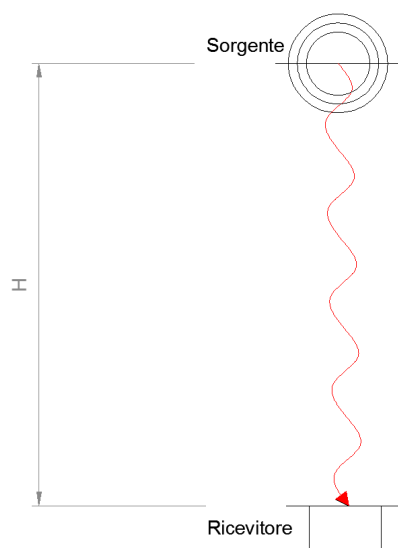


Figura 1. impulsatore in quiete

Posizioniamo adesso il nostro orologio sopra un treno che viaggia rispetto al laboratorio con velocità V ; il principio di equivalenza ci insegna che messo dentro al treno l'orologio, visto fermo in quanto solidale con il moto dei convogli, compierà il proprio dovere proprio come farebbe sulla terra ferma. È importante sottolineare ancora che nel sistema di riferimento solidale all'orologio (e al treno) il cammino della luce è sempre lo stesso, verticale come nella Figura 1: partenza da una sorgente fissa e arrivo ad un ricevitore fisso.

Indicheremo con S' il sistema di riferimento solidale al treno in moto, e in generale i pedici saranno utilizzati per indicare le coordinate coerenti con tale sistema; indicheremo invece con S il sistema di riferimento del laboratorio. Visto dal laboratorio l'orologio non è più in quiete, ma al contrario si muove con la stessa velocità V del treno, per cui la luce percorre non più una traiettoria "statica" verticale ma al contrario traccia l'ipotenusa di un triangolo che ha per cateto di base la distanza percorsa dal treno.

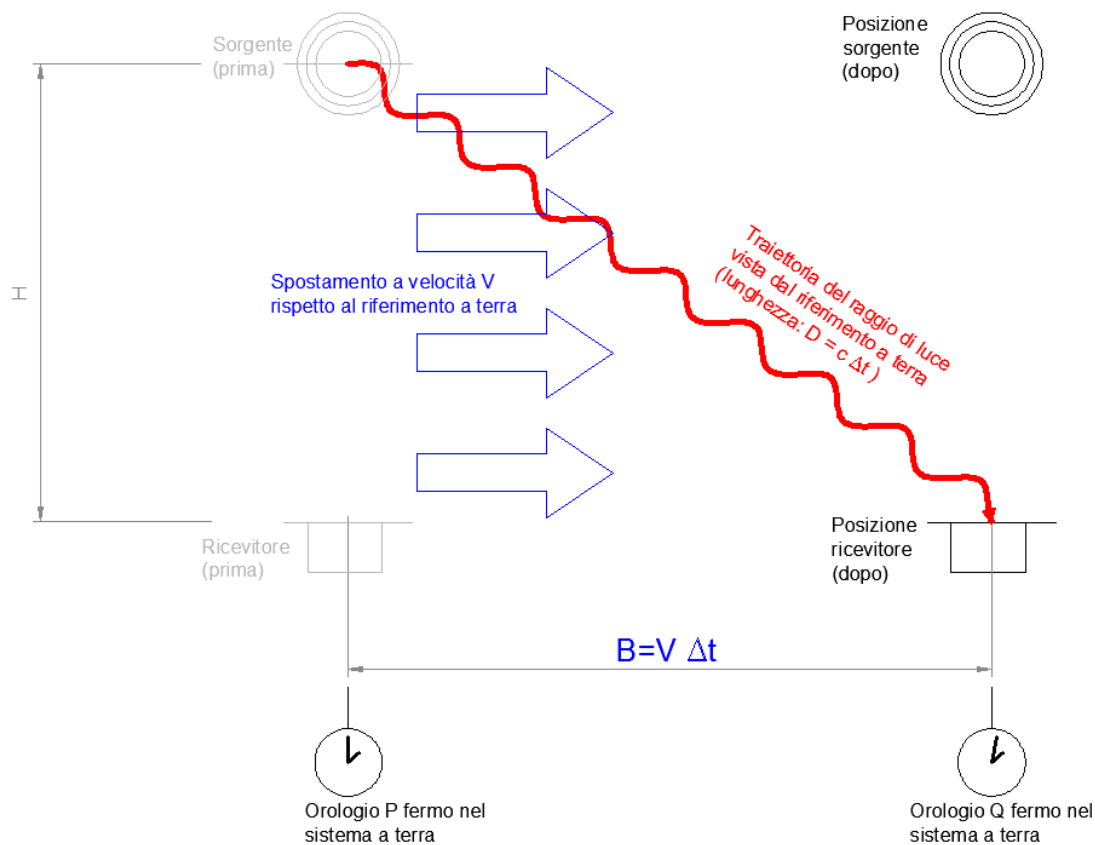


Figura 2. impulsatore in moto

$B = V \cdot \Delta t$ è appunto la distanza percorsa dall'orologio in moto.

Qui si è indicata la Δt senza apice perché ci stiamo riferendo al tempo letto dagli orologi P e Q del laboratorio a terra (come abbiamo detto gli orologi del laboratorio sono sparsi ovunque: effettivamente anche nelle stazioni ferroviarie se ne trovano più di uno lungo lo stesso binario). In particolare l'orologio posizionato in P legge il tempo alla partenza del segnale luminoso, mentre quello in Q segna il tempo all'arrivo al ricevitore. Rispetto al sistema S la distanza D percorsa dalla sorgente al ricevitore si può calcolare con il teorema di Pitagora:

$$D^2 = B^2 + H^2 = (V \cdot \Delta t)^2 + (c \cdot \Delta t')^2$$

in cui abbiamo operato le sostituzioni di B e H in funzione degli intervalli di tempo, come visti dal sistema S ed S' (ricordiamo che il nostro scopo è individuare una relazione tra il tempo trascorso nel sistema S' e quello del sistema S). Per quanto riguarda la lunghezza dell'ipotenusa, si deve ricordare che la velocità nel sistema S è ancora c, per cui:

$$D^2 = (c \cdot \Delta t)^2$$

Recuperando quanto ricavato sopra si ottiene un risultato a prima vista sorprendente:

$$(c \cdot \Delta t)^2 = (V \cdot \Delta t)^2 + (c \cdot \Delta t')^2$$

Tale espressione, riordinata, porta al risultato (lasciando al lettore la dimostrazione):

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta t'$$

La relazione è di tipo lineare e la proporzionalità è espressa da un termine che in letteratura è noto come γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$$

Affinché la radice abbia un senso nell'ambito dei numeri reali, si deve avere che $V < c$, ossia è per noi più facile intendere che tutte le velocità possibili debbano essere inferiori a c . Con questa ipotesi (assai ragionevole almeno per un treno!) si ha che il tempo visto dagli orologi "a terra" scorre ad un ritmo più veloce di quello visto dall'orologio sul treno, perché γ è maggiore di 1, come si può facilmente verificare. Questo fatto esprime proprio il cosiddetto fenomeno della dilatazione del tempo: dobbiamo effettivamente rassegnarci al fatto che il ritmo dell'universo non è univoco, dipendendo dalle velocità relative tra sistemi, e in particolare l'orologio del viaggiatore ha un ritmo "dilatato" rispetto agli orologi della stazione.

A questo punto però occorre porci una domanda fondamentale. Visto che rispetto al treno è la terra a muoversi (in senso opposto, con velocità $-V$), potremmo chiederci: perché è solo il tempo nel treno a dilatarsi? Se ci si pensa bene, però, si realizza che la *simmetria in realtà è solo apparente*: nel sistema del treno vi è "un unico orologio" che fa tutto, mentre nel laboratorio abbiamo ribadito che il tempo viene controllato da più orologi (nel nostro esempio, P e Q). Nel primo caso parleremo quindi di tempo "proprio", ossia di tempo segnato dall'orologio che *portiamo addosso* (ad esempio, un orologio al polso dell'osservatore): è dunque il tempo proprio a scorrere più lentamente di quello degli orologi nel laboratorio, e la circostanza uno-molti giustifica l'asimmetria della situazione. Viaggiando si invecchia più lentamente rispetto a chi rimane a terra, vivendo una vita sedentaria tra gli orologi di una stazione...

Un'ultima osservazione sul tipo di dipendenza "semplice" che lega i due intervalli di tempo. Avremmo potuto pensare a relazioni che coinvolgessero $\Delta t'^2$, oppure $\log \Delta t'$, o altre forme complicate: ma in tal caso il risultato di deformazione sarebbe dipeso anche dall'ampiezza presa dell'intervallo di tempo, quindi avremmo potuto forzare il nostro esperimento per ottenere una qualsivoglia deformazione temporale solo cambiando la durata dei fenomeni indagati (magari allontanando sorgente-ricevitore dell'orologio luce). Quindi, pensandoci bene, il risultato ottenuto è quello più ragionevole in una teoria che, pur lontana dal senso comune, ha la pretesa di essere la più semplice possibile.