0080_Trasformazioni di Lorentz

Siamo finalmente giunti alla descrizione matematica completa di come si trasformano le coordinate dello spazio e del tempo passando da un sistema di riferimento ad un altro. Nel corpo di questo paragrafo ci limiteremo a fornire i risultati (trasformazioni di Lorentz), in quanto la dimostrazione richiede un po' di pazienza e allo sviluppo dei calcoli sarà dedicata l'appendice finale, per i più curiosi.

Fino a questo punto ci siamo preoccupati di mostrare alcuni effetti verificabili della teoria della relatività ristretta che derivano da un'unica assunzione: la fisica deve essere la stessa in tutti i sistemi inerziali. Partendo da questo presupposto abbiamo incluso nella trattazione i fenomeni elettromagnetici, e dunque siamo stati "obbligati" ad accettare la conseguenza che la velocità della luce non vari nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro: da qui la deformazione di spazio e tempo. In questo paragrafo ci proponiamo di andare oltre: mostreremo come si possa parlare di spazio e tempo come entità simili, di fatto non separabili, generalizzando le leggi di trasformazione tra coordinate spazio-temporali. Come primo ingrediente ricordiamo che le dimensioni di spazio e tempo differiscono solo per un fattore velocità: per questo motivo ci risulterà più comodo uniformare tali dimensioni e parlare non più del parametro tempo t, ma di c moltiplicato per t, ossia ct, che ha anch'esso dimensionalità di uno spazio (abbiamo visto che la velocità c è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento, quindi va bene per tutti i riferimenti!).
Le nostre coordinate saranno dunque da adesso in poi x e ct. Potremmo estendere il ragionamento anche a y e z, ma per semplicità ammetteremo moti solo lungo l'asse x.
Per prima cosa, consideriamo il moto relativo di un sistema S' *in avanti* rispetto ad un sistema S con velocità V. Stavolta non rinunceremo alla simmetria privilegiando un sistema rispetto ad un altro, ossia ammetteremo infiniti orologi solidali al sistema S e altrettanti infiniti orologi solidali al sistema S'. Senza perdere di generalità ipotizzeremo che tutti gli orologi dei due sistemi siano azzerati quando $x'=x=0$ (allineamento delle origini dei sistemi di coordinate), ossia quando lo 0 del sistema S' si trova a passare in coincidenza con lo 0 del sistema S. Nell'ipotesi più generale (sempre preservando la linearità per i motivi già descritti in precedenza), le trasformazioni di coordinate dal sistema S' al sistema S possono essere scritte:

$$\begin{cases} ct = \gamma \cdot ct' + \dfrac{V}{c}\gamma \cdot x' \\ x = \dfrac{V}{c}\gamma \cdot ct' + \gamma \cdot x' \end{cases}$$

Eq. 1

Viceversa, le trasformazioni inverse che portano dalla descrizione nel sistema S al sistema S' sono date da:

$$\begin{cases} ct' = \gamma \cdot ct - \dfrac{V}{c}\gamma \cdot x \\ x' = -\dfrac{V}{c}\gamma \cdot ct + \gamma \cdot x \end{cases}$$

Eq. 2

Non è possibile non notare la perfetta simmetria, derivante dal fatto che la situazione descritta di "slittamento" dei due sistemi di riferimento corrisponde a considerare, rispetto al sistema S', il sistema S come moventesi all'*indietro* con la medesima velocità V. Matematicamente un moto all'indietro a velocità V è descritto come un moto in avanti a velocità –V. Dal momento che dunque i due sistemi di riferimento hanno velocità opposte l'uno rispetto all'altro, le equazioni del sistema n. 2 sono le stesse del sistema n. 1, avendo solamente operato la sostituzione da V a -V.
I più esperti nel calcolo analitico vedranno che nel caso limite di V molto minore di c le trasformazioni date si riducono a quelle di Galileo (e per di più t'=t).

Spesso per comodità si usa riferirsi al parametro V/c con la lettera β. In questo modo , scritte per esteso le trasformazioni diventano:

$$\begin{cases} ct = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct' + \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x' \\ x = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct' + \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x' \end{cases} \quad \text{e la sua inversa :} \quad \begin{cases} ct' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct - \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x \\ x' = -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot ct + \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot x \end{cases}$$

Eq. 3

In un altro paragrafo sarà mostrato come la forma di tali equazioni sia identica a quella di una cosiddetta "rotazione iperbolica". Vedremo che la proprietà che caratterizza le rotazioni iperboliche è esattamente la traduzione geometrica di una proprietà analitica fondamentale della nostra teoria (invarianza di una certa quantità, denominata intervallo spazio-tempo).
In definitiva una forma ancora più raffinata per esprimere le trasformazioni di Lorentz è:

$$\begin{cases} ct = \cosh\psi \cdot ct' + \sinh\psi \cdot x' \\ x = \sinh\psi \cdot ct' + \cosh\psi \cdot x' \end{cases} \quad \text{e la sua inversa :} \quad \begin{cases} ct' = \cosh\psi \cdot ct + \sinh(-\psi) \cdot x \\ x' = \sinh(-\psi) \cdot ct + \cosh\psi \cdot x \end{cases}$$

$$\psi = \operatorname{arctanh}\beta$$

Eq. 4

Appendice: la dimostrazione completa

In questa appendice, che può essere saltata da chi non vuole addentrarsi troppo nel dettaglio matematico, viene sviluppata la dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz mostrate in precedenza. Coltivando un po' di intuizione fisica, comunque, si possono seguire agevolmente gran parte dei passaggi senza "affondare" nei calcoli.
Ma procediamo per ordine. La dipendenza lineare, di cui abbiamo avuto già avuto prova, porta all'unica forma possibile delle equazioni di trasformazione esprimibile in termini di quattro coefficienti A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}:

$$\begin{cases} ct = A_{00}ct' + A_{01}x' \\ x = A_{10}ct' + A_{11}x' \end{cases}$$

Eq. 5

Dove si è scelta questa particolare notazione dei coefficienti per anticipare che la trasformazione è esprimibile attraverso una matrice. Come vedremo più avanti, infatti, con il formalismo delle matrici alcuni passaggi diventano automatici.

Un primo risultato praticamente immediato ci viene dato dal caso in cui per il sistema S’ si consideri il tempo proprio di un osservatore solidale al moto di S' stesso e posto all'origine di tale sistema (la coordinata di tale osservatore sarà sempre x’=0). Abbiamo quindi la possibilità di determinare automaticamente il coefficiente A_{00} sulla base di quanto mostrato per la dilatazione dei tempi:

$x'=0 \quad \Rightarrow \quad ct = A_{00}ct' \quad \Rightarrow \quad A_{00} = \gamma$ per quanto visto in precedenza.

Eq. 6

Per il momento ci si può limitare ad alcuni meri passaggi algebrici per invertire le relazioni ed esprimere le coordinate del sistema S’ in funzione di quelle del sistema S:

$$\begin{cases} ct' = \dfrac{1}{A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01}}\left(A_{11}ct - A_{01}x\right) \\ x' = \dfrac{1}{A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01}}(-A_{10}ct + A_{00}x) \end{cases}$$

Eq. 7

Ma come abbiamo già detto, la trasformazione inversa consiste nel mettersi nel sistema di riferimento S’ e vedere il sistema S scorrere all’indietro. Per cui se considerassimo il tempo proprio nel sistema S e seguissimo un osservatore fermo in tale sistema (la sua coordinata sarebbe sempre x=0) l’effetto del rallentamento del tempo del suo orologio da polso sarebbe:

$$ct' = \frac{A_{11}}{A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01}}ct \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{11}}{A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01}} = \gamma$$

Eq. 8

Stiamo in pratica cercando di tradurre la simmetria della fisica in una simmetria della struttura algebrica, e il tentativo sembra essere proficuo.
Sfruttiamo ancora la relazione che determina la coordinata *x*’ in funzione di *x* e *t*, ricordando che *x*’ resta sempre nulla quando *x*=V*t* (in pratica: quando *x* sta “inseguendo” l’origine del sistema di riferimento che viaggia in avanti a velocità V). Questa circostanza si può esprimere come una proprietà del numeratore della prima equazione del sistema 7:

$$(-A_{10}ct + A_{00}x) = 0 \quad \text{quando} \quad x = Vt$$

Eq. 9

In definitiva si ottiene:

$$A_{10} = A_{00} \cdot \frac{V}{c} = \gamma \frac{V}{c}$$

Eq. 10

Per calcolare A_{01} senza basarsi su argomentazioni di simmetria si può operare nel seguente modo. Per prima cosa si considera il cammino di un raggio di luce. Nel sistema S vale chiaramente la condizione "tanto tempo è trascorso, tanto spazio è stato percorso dalla luce, a velocità c" che si può esprimere:

$$(ct)^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad (ct)^2 - x^2 = 0$$

Eq. 11

Ma questa relazione resta valida anche quando viene descritta delle coordinate del sistema S', per il quale scriveremo:

$$(ct')^2 = x'^2 \quad \Rightarrow \quad (ct')^2 - x'^2 = 0$$

Eq. 12

Di conseguenza si possono sfruttare le relazioni tra coordinate di S ed S' ancora espresse in termini dei parametri incogniti per individuare delle condizioni sui coefficienti A.

$$\begin{aligned}(ct)^2 - x^2 &= (A_{00}\, ct' + A_{01}x')^2 - (A_{10}ct' + A_{11}x')^2 = A_{00}{}^2(ct')^2 + A_{01}{}^2 x'^2 + 2A_{00}A_{01}ct'x' + \\ &- A_{10}{}^2(ct')^2 - A_{11}{}^2 x'^2 - 2A_{10}A_{11}ct'x' = \left(A_{00}{}^2 - A_{10}{}^2\right)(ct')^2 + \left(A_{01}{}^2 - A_{11}{}^2\right)x'^2 + 2ct'x'\left(A_{00}A_{01} - A_{10}A_{11}\right) = \\ &\overset{\text{deve essere uguale a:}}{=} (ct')^2 - x'^2\end{aligned}$$

Eq. 13

Affinché l'ultima uguaglianza sia vera devono quindi verificarsi le tre condizioni sui coefficienti A_{01}, A_{10}, A_{11}:

$$\begin{cases}\left(A_{00}{}^2 - A_{10}{}^2\right) = 1 \\ \left(A_{01}{}^2 - A_{11}{}^2\right) = -1 \\ \left(A_{00}A_{01} - A_{10}A_{11}\right) = 0\end{cases}$$

Eq. 14

La verifica della prima delle tre con i risultati già ottenuti segue con un po' di algebra:

$$A_{00}{}^2 - A_{10}{}^2 = \gamma^2 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 \gamma^2 = \gamma^2\left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right] = \frac{\gamma^2}{\gamma^2} = 1$$

Eq. 15

Resta dunque un sistema a due incognite, A_{01} e A_{11}:

$$\begin{cases}\left(A_{01}{}^2 - A_{11}{}^2\right) = -1 \\ \left(A_{00}A_{01} - A_{10}A_{11}\right) = 0\end{cases}$$

Eq. 16

Dalla seconda delle due si ottiene:

$$A_{11} = \frac{\gamma A_{01}}{\gamma \frac{V}{c}} = \frac{A_{01}}{V/c}$$

Eq. 17

Che sostituita nella prima:

$$A_{01}{}^2 - \left(\frac{A_{01}}{V/c} \right)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad A_{01} = \frac{V}{c}\gamma = A_{10}$$

Eq. 18

Riordinando tutti i risultati si ottengono finalmente le equazioni di trasformazione tra sistemi inerziali, che abbiamo già mostrato:

$$\begin{cases} ct = \gamma \cdot ct' + \dfrac{V}{c}\gamma \cdot x' \\ x = \dfrac{V}{c}\gamma \cdot ct' + \gamma \cdot x' \end{cases}$$

Eq. 19

Tali equazioni si presentano in una forma elegantemente simmetrica e compatta, come può essere meglio messo in evidenza mediante la notazione matriciale (con la consueta regola di prodotto righe per colonne):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & V/c\,\gamma \\ V/c\,\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

Eq. 20

La forma ottenuta giustifica la scelta euristica iniziale di considerare il parametro *ct* in luogo del solo tempo *t*. Adesso dobbiamo "solamente" preoccuparci di abbinare le proprietà matematiche derivanti da questo risultato ai relativi effetti fisici.