0090_La fisica di Einstein e Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz che abbiamo presentato nel paragrafo precedente ci mostrano in maniera inequivocabile che tempo e spazio non sono due entità distinte, ma al contrario si parlerà di una lettura parametrica spazio-temporale degli eventi, che peraltro dipende dal sistema di riferimento utilizzato.
Al di là di questa evidenza, ricavabile dalla forma stessa delle equazioni, scavando più a fondo nelle equazioni si possono trovare ulteriori proprietà, molto interessanti e dotate di un pesante senso fisico.

1. **Dati due eventi, rispettivamente occorrenti in (t_1,x_1) e (t_2,x_2), la seguente quantità è invariante passando da un sistema ad un altro:**

$$\Delta s^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

Tale grandezza prende il nome di intervallo spazio-temporale e, come vedremo, ci permetterà di discriminare se un evento possa o meno essere causa di un secondo.

2. **Poiché esiste una classe di trasformazioni che garantiscono l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale, e questa classe è costituita dalla totalità delle rotazioni iperboliche, le trasformazioni di Lorentz corrispondono proprio a tali trasformazioni.**

In pratica se si volesse rappresentare sul piano Cartesiano l'effetto di una trasformazione di Lorentz nella descrizione dello stesso evento E visto in due sistemi inerziali differenti S ed S', tale effetto è lo stesso che si avrebbe "attraendo gli assi del sistema S' verso la bisettrice", ottenendo quindi una deformazione che preserva i parallelismi ed ovviamente la bisettrice stessa, che altri non è che la linea di Universo della luce (ricordiamo: la linea di Universo è la traiettoria rappresentata sul piano ct-x). Per avere un'idea dell'effetto della trasformazione è sufficiente osservare la successiva Figura 1, in cui si indicano le coordinate spazio-temporali del medesimo evento E (ad esempio: lo scoppio di un petardo).

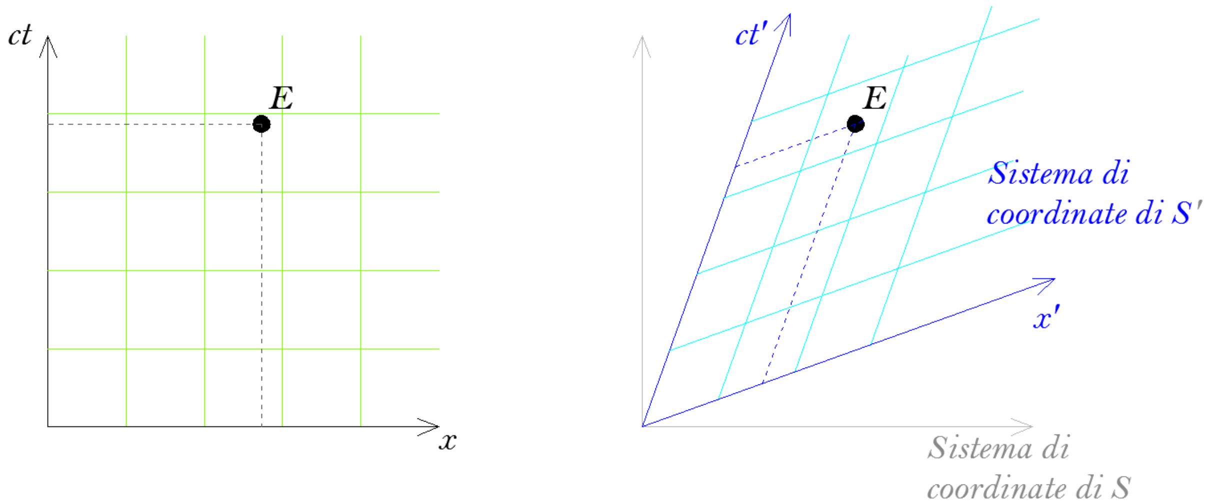

Figura 1. Stesso evento "E" visto da due differenti sistemi di riferimento. Sistema S del laboratorio (a sinistra) e sistema S' solidale al treno in moto (a destra).

3. **se in un sistema inerziale l'intervallo spazio-temporale è positivo, lo è in tutti i sistemi inerziali; parimenti se è negativo lo sarà in tutti i sistemi.**

La qual cosa, che apparentemente può sembrare un inutile corollario, si presta invece ad una riflessione cruciale: solo coppie di eventi con valore di intervallo positivo possono essere viste accadere nello stesso punto, se si ha cura di scegliere il sistema di riferimento giusto; dunque esisterà un viaggiatore che può osservare dal proprio scompartimento del treno questi due eventi accadere nel medesimo punto, e pertanto assegnerà loro la medesima coordinata. Ma vi è un'altra conseguenza eclatante a quanto detto: essendo nulla la differenza spaziale, nel sistema di riferimento del viaggiatore il valore dell'intervallo spazio-temporale sarà esattamente la differenza del tempo letto dal proprio orologio (ossia, appunto, il tempo proprio dell'osservatore) moltiplicata per c! Vediamolo in formula:

$$\Delta s'^2 = c^2\left(t'_2 - t'_1\right)^2 - \left(x'_2 - x'_1\right)^2 \overset{\text{se } x'_2 = x'_1}{=} c^2\left(t'_2 - t'_1\right)^2$$

Questo fatto corrisponde a dire che se il primo evento si trova nell'origine (x'=0, t'=0), tutti gli eventi e solo quelli che mi possono fornire un valore di intervallo spazio-temporale positivo sono quelli della porzione di piano che avevamo definito "regione delle traiettorie possibili per gli oggetti", ossia dentro al cono-luce. Affermazione che porta ad un'altra fenomenale conclusione:

4. **Solo gli eventi dentro al cono-luce possono essere messi in relazione causale con l'evento coincidente con l'origine O, in quanto appartengono ad un futuro per esso inequivocabile (in pratica: accadono sicuramente dopo l'evento x'=0, t'=0, quindi è possibile pensare ad un rapporto di causa-effetto).**

Questo è il valore autentico della concettualizzazione del cono-luce: permette di distinguere classi di eventi che potranno o non potranno essere in correlazione causale. Nella successiva Figura 2 è mostrata dunque la zona che corrisponde al cono-luce, i cui eventi sono dunque gli unici a poter essere correlati con l'origine da un rapporto di causa-effetto. L'evento E, a cui corrisponde l'omonimo punto - e che è lo stesso dell'esempio della Figura precedente - ricade evidentemente in suddetta zona: non è escluso che possa essere causato dall'evento O posto nell'origine.

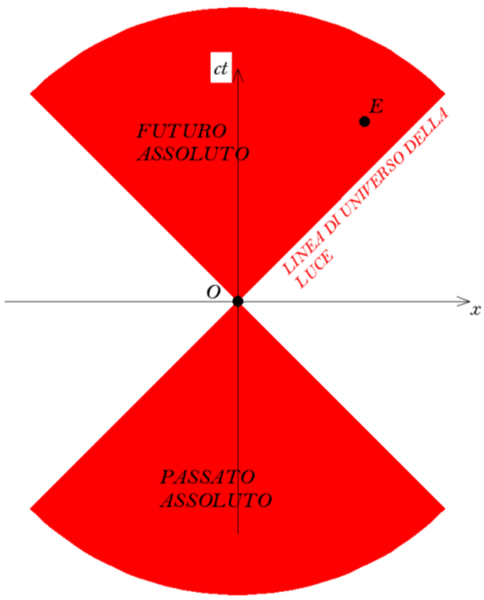

Figura 2. Cono di luce. Il cono prosegue all'infinito e parte da meno infinito

Ci si può allora domandare quale sia il destino dei punti posti fuori dal cono di luce. Il fatto che non possano essere posti in rapporto causale con il punto origine deriva da una semplicissima osservazione: un segnale che possa collegare l'origine a qualsiasi evento di tale zona (come ad esempio l'evento F in Figura 3) dovrebbe viaggiare più celermente della luce (si ricorda che per le nostre scelte la linea di universo della luce ha un angolo di 45°, dunque linee meno pendenti sono caratterizzate dal percorrere più spazio in minor tempo rispetto alla luce stessa).

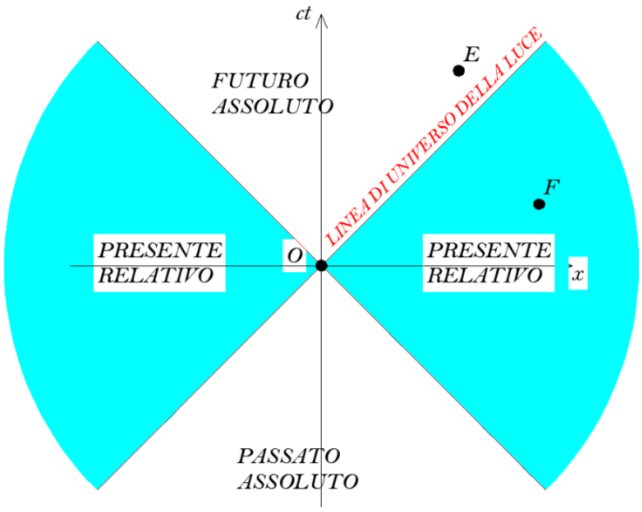

Figura 3. Punti posti fuori dal cono di luce: presente relativo. Nessun segnale, più veloce di c, può collegarli all'origine O

Veniamo dunque alla sintesi dell'ultima osservazione:

5. **I punti posti al di fuori del cono-luce non sono correlabili causalmente con l'origine. Essi sono caratterizzati da un valore negativo dell'intervallo e per ciascuno di questi punti esiste un sistema di riferimento in cui sono visti accadere allo stesso istante dell'evento origine.**

L'ultima affermazione si giustifica ricavando come per ogni F di tale regione di spazio-tempo si può trovare un'opportuna rotazione iperbolica che faccia giacere O ed F sul nuovo asse delle ascisse, dunque a nuova coordinata temporale nulla. Per questo motivo i punti dell'area azzurra non possono essere considerati passato o futuro, ma sono posti nel limbo del presente relativo.

Concludendo, se l'intervallo spazio-temporale tra due eventi è

- positivo, vi è la possibilità che l'uno sia la causa dell'altro (NB: non la certezza!);
- nullo, tali eventi sono "tappe" del cammino dello stesso raggio di luce;
- negativo, tali eventi appartengono ad un "presente relativo" e sono assolutamente scorrelati causalmente.

Nel prossimo paragrafo vedremo dunque come questi ausili grafici ci possano aiutare a ricomprendere il senso di contemporaneità, dilatazione temporale, contrazione delle lunghezze.

Appendice. Dimostrazioni.

Dimostriamo che l'intervallo spazio-temporale è invariante per trasformazioni di Lorentz.

Nel caso di un segnale luminoso che parte da (t_1,x_1) e arriva in (t_2,x_2) si ha che in tutti i sistemi di riferimento l'intervallo spazio-temporale è nullo e la dimostrazione è diretta conseguenza della costanza della velocità della luce in qualsiasi sistema:

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = \Delta s'^2 = 0$$

Nel caso generale è sufficiente applicare le formule di trasformazione ottenute in precedenza scrivendo le x e le t in funzione di x' e t':

$$\Delta s^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot c(t'_2 - t'_1) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot (x'_2 - x'_1)\right]^2 - \left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot c(t'_2 - t'_1) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot (x'_2 - x'_1)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\left[c(t'_2 - t'_1) - \beta(x'_2 - x'_1)\right]^2 - \left[\beta c(t'_2 - t'_1) - (x'_2 - x'_1)\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{\begin{array}{l} c^2(t'_2 - t'_1)^2 + \beta^2(x'_2 - x'_1)^2 - 2\beta c(t'_2 - t'_1)(x'_2 - x'_1) - \beta^2 c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 + \\ + 2\beta c(t'_2 - t'_1)(x'_2 - x'_1) \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{c^2(t'_2 - t'_1)^2(1-\beta^2) - (x'_2 - x'_1)^2(1-\beta^2)\right\} = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = \Delta s'^2$$

q.e.d.