

Diagrammi di Feynman in QED

Luca Alfinito, maggio 2019

1. Matrice S e Teorema di Wick

L'ampiezza di transizione da uno stato iniziale ad uno finale nello spazio di Fock è data dalla matrice S:

$$A = \langle f | S | i \rangle$$

Eq. 1-1

Ricordiamo l'espansione della matrice mediante lo sviluppo di Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T\{H_I(x_1) \dots H_I(x_n)\}$$

Eq. 1-2

In cui ricordiamo che il prodotto T-ordinato è l'operatore che riposiziona i fattori dal più temporalmente lontano al più recente, con ordinamento da destra a sinistra. Per realizzare questa operazione si devono ovviamente applicare le regole di commutazione o di anticommutazione rispettivamente per i bosoni o i fermioni.

Nell'ipotesi di buona convergenza (da verificare) essa è valida a prescindere dalla natura dell'interazione.

Il Teorema di Wick, valido per tempi tutti diversi, mette in relazione i prodotti T-ordinati con i prodotti normali:

$$\begin{aligned} T\{ABCD\dots YZ\} &= N(ABCD\dots YZ) + \sum_{n=1} \sum_{\substack{\text{combinazioni} \\ \text{con } n \text{ contrazioni}}} N(\text{campi rimanenti}) = \\ &= N(ABCD\dots YZ) + \\ &+ \langle 0 | T(AB) | 0 \rangle N(CD\dots YZ) + \langle 0 | T(AC) | 0 \rangle N(BD\dots YZ) + \dots + \langle 0 | T(YZ) | 0 \rangle N(BD\dots WX) + \\ &+ \langle 0 | T(AB) | 0 \rangle \langle 0 | T(CD) | 0 \rangle N(EF\dots YZ) + \dots + \langle 0 | T(WX) | 0 \rangle \langle 0 | T(YZ) | 0 \rangle N(AB\dots UV) + \\ &+ \text{combinazioni con 3 contrazioni} + \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Eq. 1-3

Nel caso in cui l'Hamiltoniana di interazione sia descritta da un vertice del tipo:

$$H_I = N(AB\dots)$$

Eq. 1-4

Si ha la seguente fondamentale estensione del teorema di Wick:

$$T\{N(AB\dots)_{x_1} \dots N(AB\dots)_{x_n}\} = T\{(AB\dots)_{x_1} \dots (AB\dots)_{x_n}\}_{\text{no contrazioni con tempi uguali}}$$

Eq. 1-5

In futuro i prodotti normali saranno indicati entro due punti.

Passiamo adesso alla disamina dei campi coinvolti nella QED. Nel caso di fermioni:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x) = \sum_{r,\mathbf{p}} \left(c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^+(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \right) \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) = \sum_{r,\mathbf{p}} \left(d_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c_r^+(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \right)\end{aligned}$$

Eq. 1-6

Dunque:

$\psi^+(x)$ assorbe una particella

$\bar{\psi}^-(x)$ crea una particella

$\bar{\psi}^+(x)$ assorbe un'antiparticella

$\psi^-(x)$ crea un'antiparticella

Per il propagatore fermionico scriveremo:

$$\langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle = iS_F(x_1 - x_2)$$

Eq. 1-7

Nel caso di fotoni (campi reali di spin 1):

$$A^\mu(x) = A^{\mu+}(x) + A^{\mu-}(x) = \sum_{r,\mathbf{k}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \left(a_r(\mathbf{k}) e^{-ipx} + a_r^+(\mathbf{k}) e^{ipx} \right)$$

Eq. 1-8

$A^{\mu+}(x)$ assorbe un fotone

$A^{\mu-}(x)$ produce un fotone

Per il propagatore fotonico scriveremo:

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \} | 0 \rangle = iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2)$$

Eq. 1-9

2. Diagrammi QED nello spazio delle configurazioni

Per la QED il vertice di interazione è dato da:

$$H_I(x) = -e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) :$$

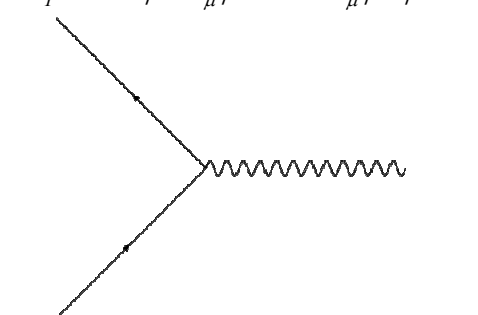
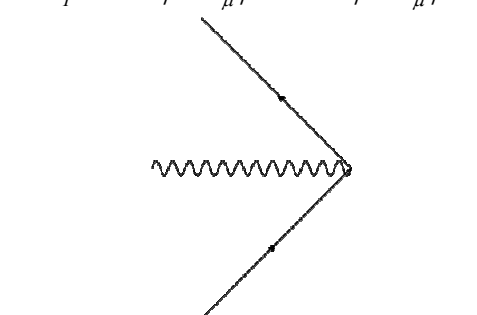
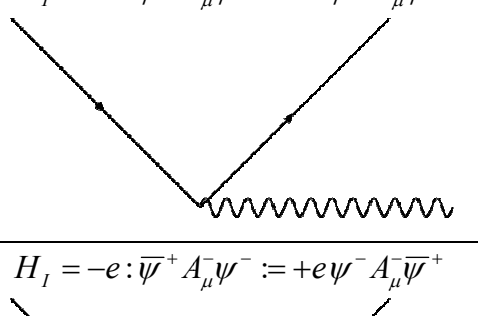
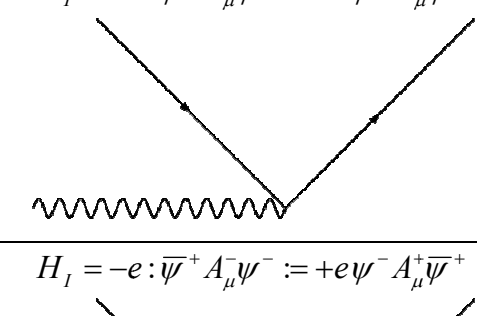
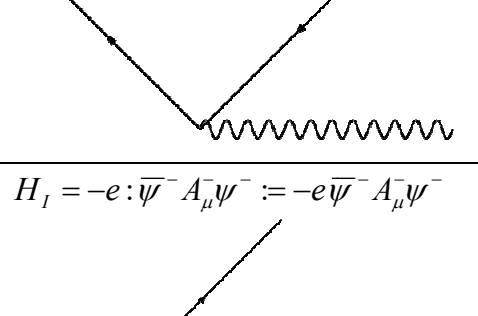
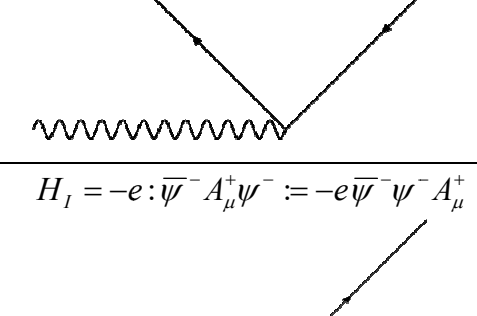
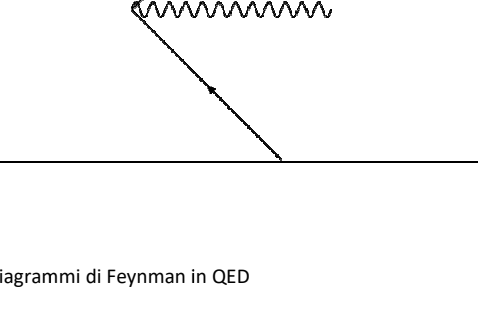
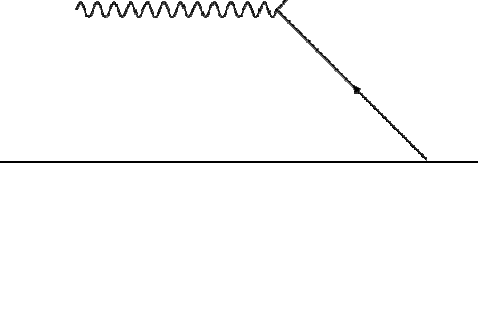
Eq. 2-1

Espandendo i termini:

$$H_I = -e : (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) \gamma^\mu (A_\mu^+ + A_\mu^-) (\psi^+ + \psi^-) :$$

Eq. 2-2

Vediamo che lo sviluppo precedente genera i processi di vertice descritti nello schema di seguito.

$H_I = -e : \bar{\psi}^+ A_\mu^- \psi^+ := -e A_\mu^- \bar{\psi}^+ \psi^+$ 	$H_I = -e : \bar{\psi}^+ A_\mu^+ \psi^+ := -e \bar{\psi}^+ A_\mu^+ \psi^+$ 
$H_I = -e : \bar{\psi}^- A_\mu^- \psi^+ := -e \bar{\psi}^- A_\mu^- \psi^+$ 	$H_I = -e : \bar{\psi}^- A_\mu^+ \psi^+ := -e \bar{\psi}^- A_\mu^+ \psi^+$ 
$H_I = -e : \bar{\psi}^+ A_\mu^- \psi^- := +e \psi^- A_\mu^- \bar{\psi}^+$ 	$H_I = -e : \bar{\psi}^+ A_\mu^+ \psi^- := +e \psi^- A_\mu^+ \bar{\psi}^+$ 
$H_I = -e : \bar{\psi}^- A_\mu^- \psi^- := -e \bar{\psi}^- A_\mu^- \psi^-$ 	$H_I = -e : \bar{\psi}^- A_\mu^+ \psi^- := -e \bar{\psi}^- \psi^- A_\mu^+$ 

Vedremo più avanti che l'ampiezza di transizione al primo ordine dà però contributo nullo, in quanto si tratta di processi non fisici.

Passiamo quindi ad analizzare i diagrammi al secondo ordine, che hanno due vertici indipendenti:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T\{H_I(x_1)H_I(x_2)\} = \sum_A^F S_A^{(2)}$$

Eq. 2-3

Vediamo nel dettaglio i vari contributi:

$$\begin{aligned} S_A^{(2)} &= -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\nu A_\nu\psi)_{x_2} : \\ S_B^{(2)} &= -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle : (\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu)_{x_1} (\gamma^\nu A_\nu\psi)_{x_2} : + \right. \\ &\quad \left. + \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle : (\gamma^\mu A_\mu\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\nu A_\nu)_{x_2} : \right\} \\ S_C^{(2)} &= -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle : (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)_{x_2} : \\ S_D^{(2)} &= -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle : (\bar{\psi}\gamma^\mu)_{x_1} (\gamma^\nu\psi)_{x_2} : + \right. \\ &\quad \left. + \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle : (\gamma^\mu\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\nu)_{x_2} : \right\} \\ S_E^{(2)} &= -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle : (\gamma^\mu A_\mu)_{x_1} (\gamma^\nu A_\nu)_{x_2} : \right\} \\ S_F^{(2)} &= -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle \right\} \end{aligned}$$

Eq. 2-4

Il termine A non è interessante perché tratta due vertici completamente indipendenti, ciascuno assumendo una delle otto configurazioni di singolo vertice.

Per quanto riguarda il termine B , composto di due addendi, ci si accorge che tali addendi sono perfettamente identici perché il secondo può essere riscritto come il primo con una permutazione pari di fermioni ed interscambiando le variabili di integrazione:

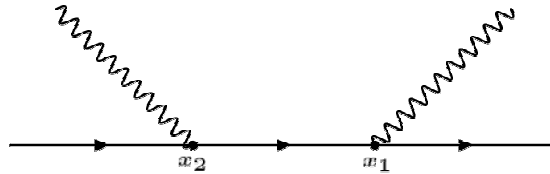
$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle : (\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu)_{x_1} (\gamma^\nu A_\nu\psi)_{x_2} :$$

Eq. 2-5

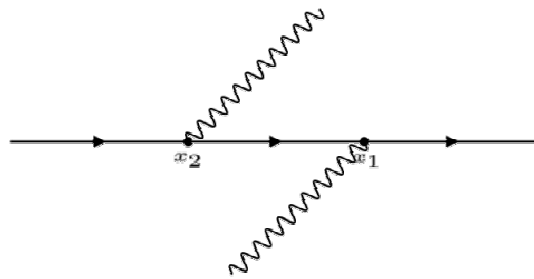
Come vedremo tale operatore contribuisce a molti processi, tutti caratterizzati dalla presenza del propagatore fermionico. Tra questi:

Scattering fotone/elettrone (Compton scattering)- Scattering fotone/positrone

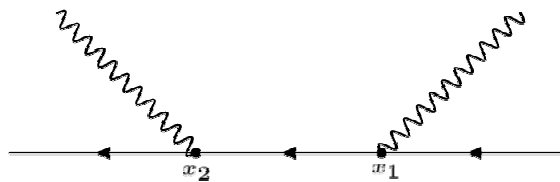
$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^- \gamma^\mu A_\mu^-)_{x_1} (\gamma^\nu A_\nu^+ \psi^+)_{x_2} :$$



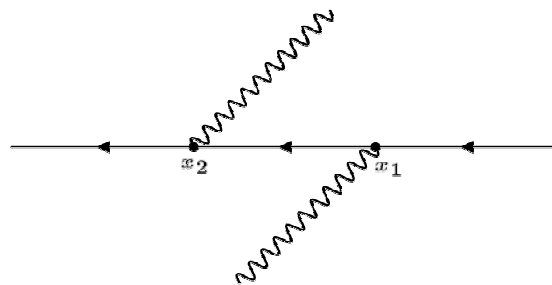
$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^- \gamma^\mu A_\mu^+)_{x_1} (\gamma^\nu A_\nu^- \psi^+)_{x_2} :$$



$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^+ \gamma^\mu A_\mu^+)_{x_2} (\gamma^\nu A_\nu^- \psi^-)_{x_1} :$$



$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_2) \bar{\psi}(x_1) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^+ \gamma^\mu A_\mu^-)_{x_2} (\gamma^\nu A_\nu^+ \psi^-)_{x_1} :$$



I quattro diagrammi precedenti si dicono topologicamente differenti, nel senso che non è possibile utilizzare una permutazione dei nomi dei vertici per mandare un qualsiasi diagramma in qualsiasi altro.

$\Upsilon \rightarrow e^+e^-$

In questo caso è importante indicare i due grafici che risultano topologicamente differenti stavolta a causa dei differenti ruoli assunti dai vertici in relazione all'assorbimento di due fotoni. Tali fotoni hanno infatti in generale impulsi differenti: nel primo grafico in x_1 si assorbe il fotone di caratteristiche di tipo "1", nel secondo il fotone di caratteristiche di tipo "2".

$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle : \bar{\psi}_{x_1}^- (\gamma^\mu A_{\mu_{\text{FOTONE 1}}}^+)_{x_1} (\gamma^\nu A_{\nu_{\text{FOTONE 2}}}^+)_{x_2} \psi_{x_2}^- : +$$

$$-e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle : \bar{\psi}_{x_1}^- (\gamma^\mu A_{\mu_{\text{FOTONE 2}}}^+)_{x_1} (\gamma^\nu A_{\nu_{\text{FOTONE 1}}}^+)_{x_2} \psi_{x_2}^- :$$

Si sottolinea invece, per quanto riguarda la permutazione completa dei vertici, che il suo effetto risulta già contemplato dall'aver cancellato il termine 2! a denominatore fuori dall'integrale.

$e^+e^- \rightarrow \Upsilon$

$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle : \bar{\psi}_{x_1}^+ (\gamma^\mu A_{\mu_{\text{FOTONE 1}}}^-)_{x_1} (\gamma^\nu A_{\nu_{\text{FOTONE 2}}}^-)_{x_2} \psi_{x_2}^+ : +$$

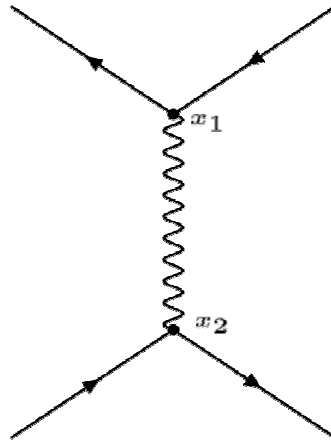
$$-e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} | 0 \rangle : \bar{\psi}_{x_1}^+ (\gamma^\mu A_{\mu_{\text{FOTONE 2}}}^-)_{x_1} (\gamma^\nu A_{\nu_{\text{FOTONE 1}}}^-)_{x_2} \psi_{x_2}^+ :$$

Vediamo adesso i processi rappresentati dal termine C.

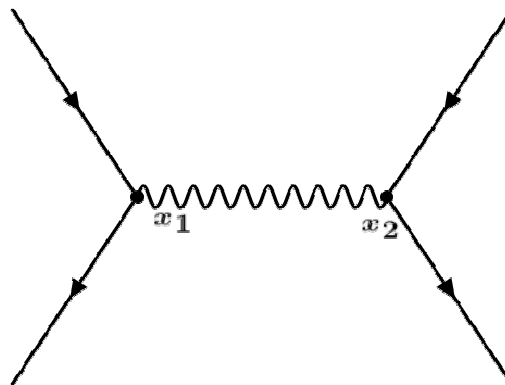
$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi)_{x_2} :$$

Eq. 2-6

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^+ \gamma^\mu \psi^-)_{x_1} (\bar{\psi}^- \gamma^\nu \psi^+)_{x_2} :$$



$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^+ \gamma^\mu \psi^+)_{x_1} (\bar{\psi}^- \gamma^\nu \psi^-)_{x_2} :$$



$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (Møller scattering)

Nelle rappresentazioni seguenti stiamo ancora una volta omettendo i diagrammi topologicamente equivalenti, limitandoci ad individuare quelli che definiscono situazioni fisiche differenti.

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}_{e1}^- \gamma^\mu \psi^+)_{x_1} (\bar{\psi}_{e2}^- \gamma^\nu \psi^+)_{x_2} : +$$

$$-\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}_{e2}^- \gamma^\mu \psi^+)_{x_1} (\bar{\psi}_{e1}^- \gamma^\nu \psi^+)_{x_2} :$$

$e^+e^+ \rightarrow e^+e^+$ (positrone-positrone scattering)

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^+ \gamma^\mu \psi_{p1}^-)_{x_1} (\bar{\psi}^+ \gamma^\nu \psi_{p2}^+)_{x_2} : +$$

$$-\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} | 0 \rangle : (\bar{\psi}^+ \gamma^\mu \psi_{p2}^-)_{x_1} (\bar{\psi}^+ \gamma^\nu \psi_{p1}^-)_{x_2} :$$

Vediamo il termine successivo D .

$$S_D^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle : (\bar{\psi}\gamma^\mu)_{x_1} (\gamma^\nu\psi)_{x_2} : + \right. \\ \left. + \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle : (\gamma^\mu\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\nu)_{x_2} : \right\} = \\ = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle : (\bar{\psi}\gamma^\mu)_{x_1} (\gamma^\nu\psi)_{x_2} : \right\}$$

Eq. 2-7

Ancora una volta i due termini sono stati accorpati perché risultano identici nel caso di scambio di variabili nel secondo. Per il caso dell'elettrone il termine è legato al seguente diagramma (omettiamo i nomi dei vertici, ormai pratici dei casi precedenti):



Che indica la proprietà di un elettrone nudo di interagire con il proprio campo (*self-energia* dell'elettrone): come vedremo si tratta di un diagramma divergente, da trattare nell'ambito della rinormalizzazione. Per il termine E :

$$S_E^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle : (\gamma^\mu A_\mu)_{x_1} (\gamma^\nu A_\nu)_{x_2} : \right\} = \\ = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle : (\gamma^\mu A_\mu)_{x_1} (\gamma^\nu A_\nu)_{x_2} : \right\}$$

Eq. 2-8

Abbiamo la self-energia del fotone o polarizzazione del vuoto:



Vediamo infine F :

$$S_F^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\}|0\rangle \langle 0|T\{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\}|0\rangle \right\}$$

Eq. 2-9

Questo rappresenta un tipico diagramma di vuoto (ossia senza linee esterne).

3. Diagrammi QED nello spazio dei momenti

Vediamo per prima cosa di definire gli stati di particella dagli operatori di creazione applicati allo stato di vuoto:

$$\begin{aligned} |e^-_{\mathbf{p},r}\rangle &= c_r^+(\mathbf{p})|0\rangle \\ |\gamma_{\mathbf{k},r}\rangle &= a_r^+(\mathbf{k})|0\rangle \end{aligned}$$

Eq. 3-1

Cosicché risulta facile scrivere l'azione degli operatori di campo:

$$\begin{aligned} \psi^+(x)|e^-_{\mathbf{p},r}\rangle &= \int \sum_{\mathbf{p}', r'} (c_{r'}(\mathbf{p}') u_{r'}(\mathbf{p}') e^{-ip'x}) c_r^+(\mathbf{p}) |0\rangle = |0\rangle u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} \\ \bar{\psi}^+(x)|e^-_{\mathbf{p},r}\rangle &= \int \sum_{\mathbf{p}', r'} (d_{r'}(\mathbf{p}') \bar{v}_r(\mathbf{p}') e^{-ip'x}) c_r^+(\mathbf{p}) |0\rangle = |0\rangle \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} \\ A_\alpha^+(x)|\gamma_{\mathbf{k},r}\rangle &= \int \sum_{\mathbf{k}', r'} (\varepsilon_{r',\alpha}(\mathbf{k}') a_{r'}(\mathbf{k}') e^{-ik'x}) a_r^+(\mathbf{k}) |0\rangle = |0\rangle \varepsilon_{r,\alpha}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \end{aligned}$$

Eq. 3-2

Analogamente si mostra come agiscono gli operatori di creazione:

$$\begin{aligned} \psi^-(x)|0\rangle &= \int \sum_{\mathbf{p}', r'} (d_{r'}^+(\mathbf{p}') v_{r'}(\mathbf{p}') e^{ip'x}) |0\rangle = |e^+_{\mathbf{p},r}\rangle v_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \\ \bar{\psi}^-(x)|0\rangle &= \int \sum_{\mathbf{p}', r'} (c_{r'}^+(\mathbf{p}') \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') e^{ip'x}) |0\rangle = |e^-_{\mathbf{p},r}\rangle \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \\ A_\alpha^-(x) &= \int \sum_{\mathbf{k}', r'} (\varepsilon_{r',\alpha}(\mathbf{k}') a_{r'}^+(\mathbf{k}') e^{ik'x}) |0\rangle = |\gamma_{\mathbf{k},r}\rangle \varepsilon_{r,\alpha}(\mathbf{k}) e^{ikx} \end{aligned}$$

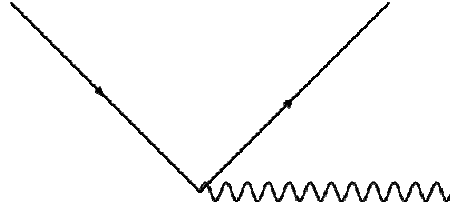
Eq. 3-3

Infine i propagatori

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\}|0\rangle &= iS_F(x_1 - x_2) = i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\varepsilon} e^{-ip(x_1 - x_2)} \\ \langle 0|T\{A^\alpha(x_1)A^\beta(x_2)\}|0\rangle &= iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) = i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x_1 - x_2)} \end{aligned}$$

Eq. 3-4

Vediamo adesso che il primo ordine $S^{(1)}$ non fornisce contributi fisici, ossia relativi a processi reali. Possiamo dimostrarlo considerando ad esempio il processo di emissione di fotone da elettrone:



$$|i\rangle = |e^-_{\mathbf{p}}\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^-_{\mathbf{p}'}; \gamma_{\mathbf{k}}\rangle$$

Eq. 3-5

In cui sono stati omissi spin e polarizzazione. Si ha:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(1)} | i \rangle &= \langle e^-_{\mathbf{p}'}; \gamma_{\mathbf{k}} | -ie \int d^4x \bar{\psi}^-(x) \gamma^\mu A_\mu^-(x) \psi^+(x) | e^-_{\mathbf{p}} \rangle = \\ &= -ie \int d^4x \langle e^-_{\mathbf{p}'}; \gamma_{\mathbf{k}} | \left(\bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip'x} \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{k}) e^{ikx} u(\mathbf{p}) e^{-ipx} \right) | 0 \rangle \end{aligned}$$

Eq. 3-6

L'integrazione sullo spazio-tempo è banale e fornisce:

$$\int d^4x e^{ip'x} e^{ikx} e^{-ipx} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'+k-p)$$

Eq. 3-7

Che esprime la conservazione del quadrimpulso e ci dà immediatamente evidenza del fatto che un tale processo non sia fisicamente possibile. Infatti, ricordando che $p^2=m^2$, $k^2=0$, tale condizione imporrebbe invece:

$$\underbrace{(p'+k)^2}_{\substack{p'^2+k^2+2p'k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ m^2 \quad 0}} = \underbrace{p^2}_{m^2}$$

Eq. 3-8

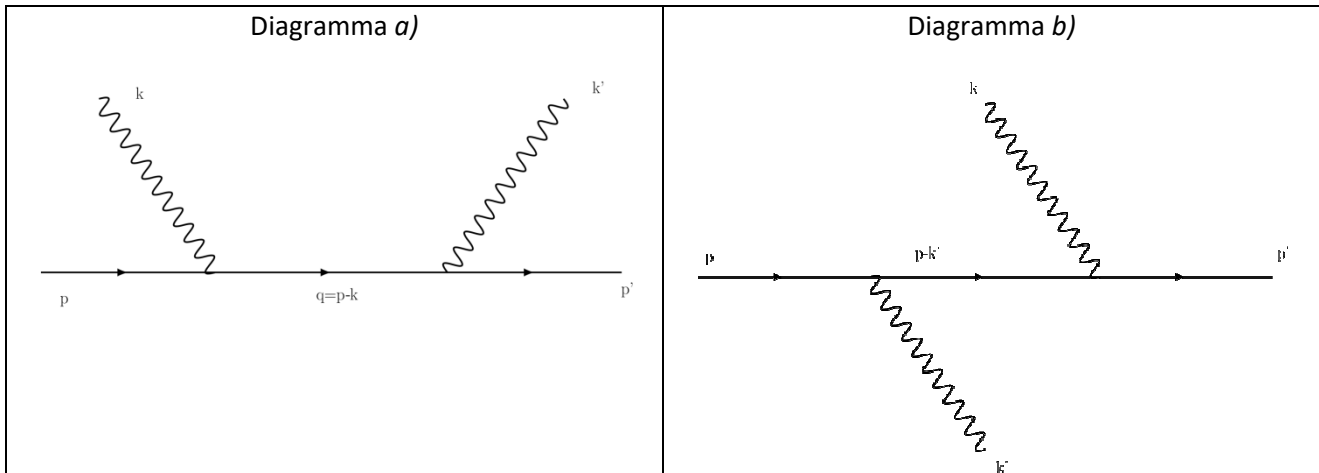
Incompatibile con i quadrimpulsi delle singole particelle. Tuttavia il risultato è utile perché suggerisce che anche in diagrammi di ordini superiori la condizione di conservazione del quadrimpulso si ripropone ad ogni vertice, come è effettivamente.

Scattering Compton

$$|i\rangle = c^+(\mathbf{p})a^+(\mathbf{k})|0\rangle \rightarrow |f\rangle = c^+(\mathbf{p}')a^+(\mathbf{k}')|0\rangle$$

Eq. 3-9

Abbiamo già visto che a questo scattering corrispondono 2 diagrammi.



$$A_a = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{k}') iS_F(q = p + k) \gamma^\nu \varepsilon_\nu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k)$$

$$A_b = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{k}') iS_F(q = p - k') \gamma^\nu \varepsilon_\nu(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k)$$

Eq. 3-10

Notiamo anche che la particella intermedia (descritta dal propagatore) non potrà mai essere reale ancora perché ancora:

$$q_a^2 = (p + k)^2 = p^2 + k^2 + 2pk = m^2 + 2pk \neq m^2$$

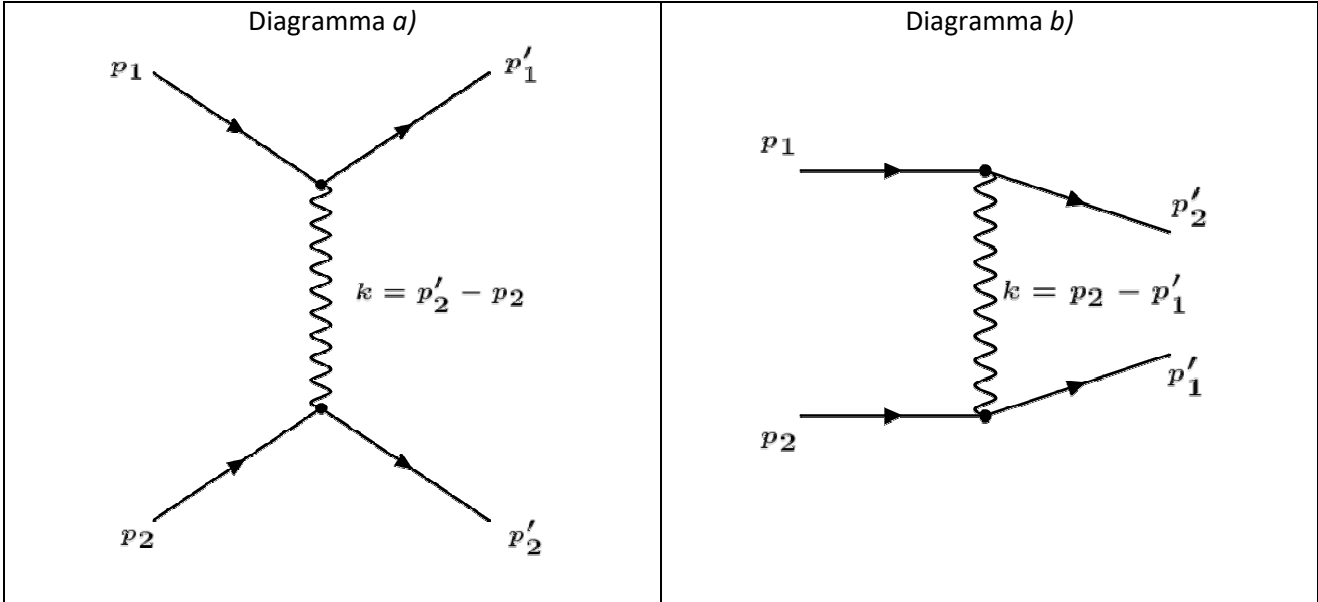
$$q_b^2 = (p - k')^2 = p^2 + k'^2 - 2pk' = m^2 + 2pk' \neq m^2$$

Eq. 3-11

Notiamo che seguire la linea fermionica di un elettrone nel senso delle sue frecce corrisponde a scrivere i fattori spinoriali da destra verso sinistra. Stessa cosa si verifica nel caso dei positroni.

$e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (Møller scattering)

Tale scattering si può costruire, oltre ad invertire completamente i vertici (cosa che comporta come abbiamo visto la scomparsa del fattore 2!), due diagrammi in funzione dello scambio degli elettroni in uscita.



$$A_a = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}_1') \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1) iD_{F\mu\nu}(k = p_2 - p_2') \bar{u}(\mathbf{p}_2') \gamma^\nu u(\mathbf{p}_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$$

$$A_b = +e^2 \bar{u}(\mathbf{p}_2') \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1) iD_{F\mu\nu}(k = p_2 - p_1') \bar{u}(\mathbf{p}_1') \gamma^\nu u(\mathbf{p}_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$$

Eq. 3-12

Al secondo termine notiamo un segno opposto rispetto al primo: tale risultato si ottiene costruendo A_b mediante riordinamento degli elementi di A_a (in tutti si ha un numero dispari di permutazioni, da cui il segno sull'anticommutatore).

E' importante notare che tale cambiamento di segno deriva dall'aver scambiato le particelle in uscita, ed è coerente con il fatto che per scambio di una coppia di fermioni la funzione d'onda ha parità -1. Da qui risulta più chiara la necessità di utilizzare anticommutatori nel caso di particelle con spin semintero.

Self energia dell'elettrone

Ci limitiamo in questa sede a presentare il risultato, la cui forma a questo punto è desumibile dalle considerazioni precedenti e che comunque sarà oggetto di approfondimenti successivi.



$$A = -e^2 \int d^4k \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu iD_{F\mu\nu}(k) iS_F(p-k) \gamma^\nu u(\mathbf{p})$$

4. Sinottico regole di Feynman

Di seguito una tabella sinottica per tradurre rapidamente gli elementi dei diagrammi nei corrispondenti componenti matematici.

Elemento	Componente	Notazione grafica
Vertice	$ie\gamma^\mu$	
Fotone virtuale (linea fotonica interna)	$iD_{F\mu\nu}(k) = i \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	
Linea fermionica interna	$iS_F(p) = i \frac{1}{\gamma^\alpha p_\alpha - m + i\epsilon}$	
Elettrone iniziale	$u_r(\mathbf{p})$	
Elettrone finale	$\bar{u}_r(\mathbf{p})$	
Positrone iniziale	$v_r(\mathbf{p})$	
Positrone finale	$\bar{v}_r(\mathbf{p})$	
Fotone iniziale	$\epsilon_{r\mu}(\mathbf{k})$	
Fotone finale (stati di polarizzazione non lineare)	$\epsilon^*_{r\mu}(\mathbf{k})$	

Le tre linee che si incontrano in ciascun vertice soddisfano la conservazione del quadrimpulso.

Vale inoltre la seguente regola: i fattori spinoriali (matrici Υ , propagatori S_F , bispinori) per ciascuna linea fermionica sono ordinati in modo che si presentano da destra a sinistra nella stessa sequenza che si ha seguendo la linea fermionica nel senso delle sue frecce.

Ciascuna espressione deve essere moltiplicata per un fattore di fase pari a +1 (-1) rispettivamente se è necessario un numero pari (dispari) di scambi di fermioni contigui per scrivere gli operatori nel corretto ordine normale. I fattori di fase assumono ovviamente importanza quando per ciascun processo vi sono più possibilità, ad esempio ottenute dallo scambio dei prodotti finali fermionici ai vertici in diagrammi in equivalenti.

Referenze

I diagrammi (ad eccezioni di quelli con loop) sono stati costruiti con il *tool* presente nel sito:

<https://feynman.aivazis.com/>