Studio di una tipica epidemia SIR (=Suscettibili, Infetti, Rimossi)

Luca Alfinito

Ci proponiamo di studiare come evolve la contaminazione di un agente patogeno all'interno di una popolazione. Per farlo possiamo assumere alcune ipotesi semplificative, come ad esempio che il tasso di nascite sia pari a quello di decessi che non siano indotti direttamente dal dato agente (plausibile per popolazioni tendenzialmente "a crescita zero", come la nostra).

Con questa ipotesi riconosciamo solo 3 tipi di persone: i sani potenzialmente infettabili, il cui numero identificheremo con *y* (anche detti i *suscettibili*), gli infetti *x* e tutti i rimanenti *z*, e quest'ultima categoria contempla sia quelli che sono definitivamente guariti (e non si ammaleranno più), sia… quelli che non si ammaleranno più per un altro tragico motivo (chiameremo la categoria *z* come i *rimossi*, nome comunque un po' infelice).

Se la popolazione iniziale è data da *N* persone, si ha ovviamente che in ogni momento:

$$x(t) + y(t) + z(t) = N$$

La variazione degli infetti dipende dai contatti tra infetti e suscettibili, inoltre però subisce un rallentamento nel passaggio di alcuni soggetti alla categoria dei rimossi. Secondo questo semplice schema scriveremo:

$$\frac{dx}{dt} = axy - bx$$

Il parametro *a* dà ragione dell'aggressività del virus e in generale di quanto possano essere facili o meno le dinamiche di trasmissione, mentre *b* è determinato dalla tendenza di guarigione degli individui infetti.

Per quanto riguarda la variazione con il tempo dei suscettibili, essa è banalmente l'opposto del primo termine:

$$\frac{dy}{dt} = -axy$$

Tralasciando le dovute considerazioni sull'effettiva esistenza di "soluzioni" al problema e lavorando un po' sulle ultime due equazioni si ottiene una dipendenza del tipo:

$$\frac{dx}{dy} = -1 + \frac{b}{ay}$$

Che restituisce una dipendenza tra il numero degli infetti e il numero dei suscettibili:

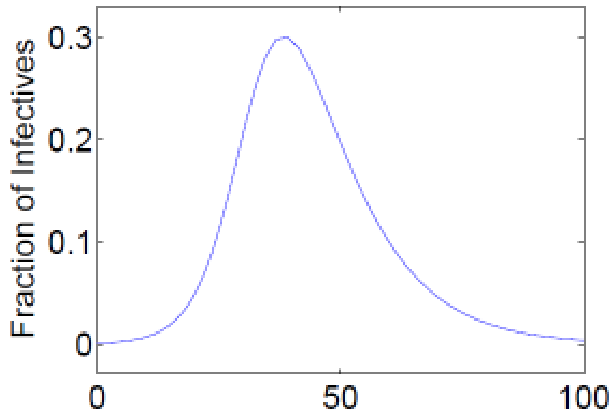
$$x = -y + \frac{b}{a}\ln y + k$$

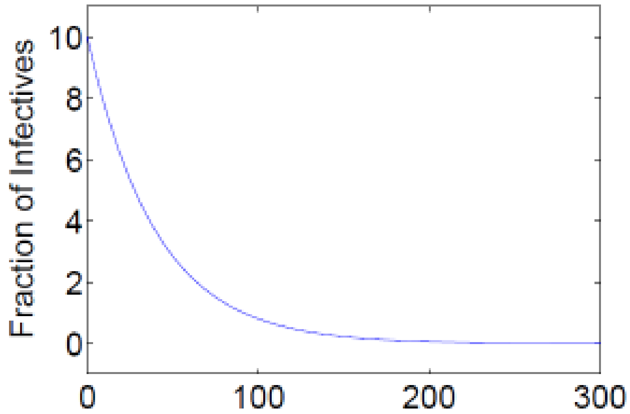
In cui *k* è un parametro dell'integrale indefinito. E' interessante rilevare che si può costruire, in funzione di *b* ed *a*, un valore detto di *soglia* dato da:

$$y_s = \frac{b}{a}$$

Se il numero iniziale di infetti è $>y_s$ l'epidemia raggiunge effettivamente un massimo ma poi tende ad estinguersi, secondo l'andamento della figura successiva a sinistra. Se invece tale numero è $<y_s$ la curva

segue l’andamento della figura a destra, ossia non si raggiungono nemmeno le condizioni di proliferazione. Interpolando i dati in nostro possesso oggi possiamo concludere che ci troviamo nella prima condizione.





Conclusioni

Tutto questo per rassicurarci che è la matematica a garantirci che non moriremo, o perlomeno non tutti. Ossia: moriremo tutti prima o poi, ma per un sacco di altre cose.

Per intanto, ricordiamoci che per tutto il resto dei nostri giorni noi viviamo!

Bibliografia

[1] F. Conti, Calcolo: teoria e applicazioni, McGraw-Hill, 1993