L’equazione dell’iconale

Luca Alfinito, marzo 2020

1. Dall’equazione d’onda all’equazione dell’iconale

Consideriamo una grandezza fisica la cui evoluzione possa essere descritta da un’equazione d’onda del tipo:

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0$$

1-1

Tale equazione può descrivere la propagazione di un potenziale (ad esempio acustico), ma moltissima fisica è costruita a partire da questo modello (ad es. Klein Gordon per i campi bosonici scalari). Nel caso dell’elettromagnetismo il parametro *c* rappresenta la velocità della luce nel vuoto (dal latino, *celeritas*), mentre *n* è l’indice di rifrazione, da cui dipende l’effettiva velocità di propagazione nel mezzo. Ovviamente *n* può cambiare da punto a punto, e in generale la soluzione di onda con fronte d’onda piano non percorrere una traiettoria rettilinea.

Nel caso in oggetto l’equazione d’onda si dice omogenea, vista l’assenza di sorgenti che comparirebbero alla destra dell’uguale. Ci sono vari modi di individuare soluzioni all’equazione d’onda, tra cui il metodo di separazione delle variabili che è particolarmente funzionale nel caso monocromatico, ossia scrivendo euristicamente una soluzione del tipo:

$$\varphi(t,\vec{x}) = X(\vec{x})e^{i\omega t}$$

1-2

L’equazione allora è semplificabile eliminando la parte :

$$\left(\nabla^2 + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\right)X(\vec{x}) = 0$$

1-3

Definiamo allora il vettore d’onda:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

1-4

Assumiamo allora che la parte spaziale della soluzione possa essere scritta come:

$$X(\vec{x}) = A(\vec{x})e^{ik_0 L}$$

1-5

In cui *L* rappresenta è definita *iconale*, e intuitivamente è associabile al percorso spaziale dell'onda (dimensionalità di una lunghezza). Calcoliamo adesso le relazioni delle grandezze introdotte derivanti dalla parte spaziale dell'equazione d'onda:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_i \partial_i \left(A(\vec{x})e^{ik_0 L}\right) + n^2 k_0^2 \left(A(\vec{x})e^{ik_0 L}\right) = \partial_i \left(e^{ik_0 L}\partial_i A(\vec{x}) + ik_0 \partial_i L(\vec{x}) A e^{ik_0 L}\right) + n^2 k_0^2 A e^{ik_0 L} = \\
&= ik_0 (\partial_i L) e^{ik_0 L}(\partial_i A) + e^{ik_0 L}\partial_i \partial_i A + ik_0 (\partial_i \partial_i L) A e^{ik_0 L} + ik_0 (\partial_i L)(\partial_i A) e^{ik_0 L} - k_0^2 (\partial_i L)(\partial_i L) A e^{ik_0 L} + n^2 k_0^2 A e^{ik_0 L} = \\
&= 2ik_0 (\partial_i L)(\partial_i A) + \partial_i \partial_i A + ik_0 (\partial_i \partial_i L) A - k_0^2 (\partial_i L)(\partial_i L) A + n^2 k_0^2 A = \\
&= \nabla^2 A + k_0^2 A\left[n^2 - \left(\vec{\nabla} L\right)^2\right] + ik_0 \left(2\vec{\nabla} L \cdot \vec{\nabla} A + iA\nabla^2 L\right)
\end{aligned}$$

1-6

Separando le parti reale e immaginaria si ottiene:

$$\begin{cases} \nabla^2 A + k_0^2 A\left[n^2 - \left(\vec{\nabla} L\right)^2\right] = 0 \\ 2\vec{\nabla} L \cdot \vec{\nabla} A + iA\nabla^2 L = 0 \end{cases}$$

1-7

L'approssimazione che conduce alla schematizzazione geometrica della propagazione ondulatoria si ottiene allora guardando l'equazione relativa alla parte reale, nel caso di frequenze "ragionevolmente" alte (o lunghezze d'onda basse), ossia:

$$\nabla^2 A << k_0^2 A\left[n^2 - \left(\vec{\nabla} L\right)^2\right]$$

1-8

In queste condizioni è possibile semplificare l'equazione riducendola all'*equazione dell'iconale*:

$$n^2 - \left(\vec{\nabla} L\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} L \cdot \vec{\nabla} L = n^2$$

1-9

2. Proprietà e significato fisico dell'equazione dell'iconale

Per comprendere il significato dell'equazione dell'iconale dobbiamo ricordarci che il gradiente di una funzione *f* punta alla direzione di massimo incremento di *f*. Così in un intorno di un dato punto la superficie infinitesima normale alla direzione del gradiente è *equifase* rispetto all'onda, mentre il gradiente indica la direzione di massimo incremento della fase: diremo che il gradiente è localmente tangente al *raggio* o *linea* *di forza*, inteso come curva di propagazione del fronte d'onda. Utilizzando questa notazione che definisce il versore nella direzione tangente al raggio scriveremo quindi:

$$\vec{\nabla} L = n\hat{l}$$

2-1

Ricordando che il gradiente permette di calcolare la derivata direzionale di una funzione:

$$\vec{\nabla}_{\vec{u}} f = \left\langle \vec{\nabla} f, \vec{u} \right\rangle$$

2-2

Si ha che:

$$\vec{\nabla} L \cdot \vec{\nabla} L = \left\langle \vec{\nabla} L, \vec{\nabla} L \right\rangle = \vec{\nabla}_{\hat{l}} L$$

2-3

E che:

$$\vec{\nabla}_{\hat{l}} L = \partial_l L = \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial l} = \vec{\nabla} L \cdot \vec{\nabla} L = \left(\partial_i L\right)\left(n l_i\right) \quad \Leftrightarrow \quad n l_i = \frac{\partial x^i}{\partial l}$$

2-4

Ossia:

$$n\hat{l} = \frac{d\vec{x}}{dl}$$

2-5

Inoltre il gradiente è sempre un campo irrotazionale (quindi conservativo) in virtù dell'identità differenziale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} L = 0$$

2-6

Questo in particolare (teorema di Stokes) permette di concludere che lungo qualsiasi linea chiusa:

$$0 = \oint_{\gamma_{\text{qualunque}}} \vec{\nabla} L \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma_{\text{qualunque}}} n\hat{l} \cdot d\vec{r}$$

2-7

La differenza di fase tra due punti è quindi indipendente dal percorso scelto:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} L \cdot d\vec{r} = L(2) - L(1)$$

2-8

Chiamiamo *cammino ottico* ogni percorso arbitrario tra due punti.

Consideriamo adesso due punti collegati da un raggio, ossia punti accomunati dal passaggio della stessa traiettoria effettiva di propagazione del fronte d'onda (supponendo per semplicità che tale raggio sia unico). È allora abbastanza intuitivo mostrare la conclusione di Fermat (*principio del minimo cammino ottico*), secondo cui il raggio rappresenta il cammino ottico avente lunghezza minima. Questo perché per qualsiasi direzione ***dr*** differente dal raggio vale, per la proprietà precedentemente vista del gradiente, la seguente disuguaglianza:

$$\vec{\nabla} L \cdot d\vec{r} \leq \vec{\nabla} L \cdot n d\hat{l}$$

2-9

E dunque il percorso deve essere più lungo per compensare, tra il punto di partenza e quello di arrivo, i minori contributi infinitesimi all'integrale dati dallo scostamento dalla traiettoria "effettiva".

Da questa semplice osservazione è ad esempio possibile ricavare la legge della rifrazione di Snell per il passaggio dell'onda tra due mezzi.

3. Iconale e funzione d'onda in Meccanica Quantistica

A chi fosse pratico con la formulazione di Hamilton-Jacobi della meccanica è noto che l'azione *S* rappresenta una funzione generatrice (precisamente del II tipo) per la quale la traiettoria classica del moto è descritta dalla seguente:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0$$

3-1

Essendo HJ un'equazione differenziale del primo ordine nelle coordinate e nel tempo, per ogni coordinata *q* (e per il tempo) è necessaria una costante di integrazione per individuare la soluzione. Di conseguenza, in generale:

$$S = S(t, q, \alpha, \ldots)$$

3-2

Si può procedere arbitrariamente considerando come costanti di integrazione i valori degli impulsi iniziali, che sono utilizzati qui come dei parametri costanti):

$$\alpha = P$$

3-3

Se inoltre l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo si può separare la dipendenza dell'azione da questo e scrivendo la soluzione nella forma:

$$S = W(q,P) - Et$$

3-4

In cui *E* è per adesso un ulteriore parametro dato. In questo schema la dipendenza dell'impulso da *W* realizza un'equazione identica nella forma a quella dell'iconale:

$$\vec{\nabla} W = \vec{p}$$

3-5

Dove l'impulso gioca adesso il ruolo dell'indice di rifrazione nell'analogo caso della 1-9. Dunque si prospetta la possibilità che associata all'evoluzione possa essere un'equazione del tipo:

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{u_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$$

3-6

Valida per una certa grandezza (da definire) nello spazio delle coordinate (nel nostro caso coincidente con lo spazio ordinario); rispetto a tale grandezza *W* avrà il ruolo di iconale, ossia di parte spaziale della fase. Per recuperare l'intera fase osserviamo che:

$$dS = dW - Edt$$

3-7

Per quanto si è detto nelle sezioni precedenti, considerando la direzione effettiva infinitesima di propagazione dell'onda si può calcolare il *dW*:

$$dW = \vec{\nabla} W \cdot d\vec{l} = p \cdot dl$$

3-8

Combinando le ultime due:

$$dS = p \cdot dl - Edt$$

3-9

S è dunque una buona candidata per essere una fase ma non ha le caratteristiche dimensionali, avendo la dimensionalità di un momento angolare. Si può allora individuare una grandezza con le dimensioni di un'azione tale che:

$$\frac{p\cdot dl}{\hbar}-\frac{Edt}{\hbar}=\frac{dS}{\hbar}=k\cdot dl-\omega\cdot dt$$

3-10

Con questa scelta, indagando il fronte di avanzamento dell'onda *dS=0*:

$$u=\frac{dl}{dt}=\frac{\omega}{k}=\frac{E}{p}$$

3-11

E l'equazione d'onda diviene:

$$\left(\nabla^2-\frac{p^2}{E^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=0$$

In particolare questa onda ha una lunghezza d'onda di:

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi\hbar}{p}$$

3-12

Un'ultima riflessione sulla velocità e il suo rapporto con l'indice di rifrazione. Volendo recuperare l'equazione d'onda nella forma 3-6 si ottiene:

$$u=\frac{E}{p}=\frac{u_0}{n}\quad\Rightarrow\quad\Leftrightarrow\quad n=u_0\frac{p}{E}$$

3-13

4. Validità dell'approssimazione iconale

L'approssimazione iconale ha a che fare con il passaggio concettuale da onda a particella. Tale passaggio, nel caso della meccanica, comporta la necessità di introdurre una grandezza dimensionale per la correzione della dimensionalità della soluzione d'onda.

Riprendiamo l'approssimazione di "particella" e vediamo le condizioni per la sua efficacia, recuperando la forma della soluzione data nella 1-5, considerando della variabilità dell'impulso lungo il cammino:

$$X(\vec{x})=A(\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}\int dW}$$

4-1

$$0 = \partial_i\partial_i\left(A(\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}\int dW} \right) + n^2k_0^2\left(A(\vec{x})e^{\frac{i}{\hbar}\int dW} \right) = \partial_i\left(e^{\frac{i}{\hbar}\int dW}\partial_i A(\vec{x}) + \frac{i}{\hbar}\left(\partial_i \int dW\right)Ae^{\frac{i}{\hbar}\int dW} \right) + n^2k_0^2 Ae^{\frac{i}{\hbar}\int dW} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(\partial_i \int dW\right)e^{\frac{i}{\hbar}\int dW}\partial_i A(\vec{x}) + e^{\frac{i}{\hbar}\int dW}\partial_i\partial_i A(\vec{x}) + \frac{i}{\hbar}\left(\partial_i\partial_i \int dW\right)Ae^{\frac{i}{\hbar}\int dW} + \frac{i}{\hbar}\left(\partial_i \int dW\right)\left(\partial_i A\right)e^{\frac{i}{\hbar}\int dW} +$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\left(\partial_i \int dW\right)\left(\partial_i \int dW\right)Ae^{\frac{i}{\hbar}\int dW} + \underbrace{n^2k_0^2}_{\frac{p^2}{\hbar^2}} Ae^{\frac{i}{\hbar}\int dW} =$$

$$= \nabla^2 A + \frac{A}{\hbar^2}\left[p^2 - \left(\vec{\nabla} W\right)^2\right] + i\left(\frac{2}{\hbar}\vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} A + \frac{1}{h} A\nabla^2 W\right) \tag{4-2}$$

In definitiva vediamo che la validità dell’approssimazione dipende dal valore di $\hbar$ (quanto più piccola è tale grandezza, tanto migliore la precisione dell’approssimazione).

Referenze

[1] L. Landau, E. Lifsits, "Meccanica", Editori Riuniti
[2] H. Goldstein, "Meccanica classica", Zanichelli