

Funzioni di Green e propagatore di Feynman

Luca Alfinito, aprile 2020

1. Dall'equazione del moto alla funzione di Green

Partiamo ancora una volta dall'equazione di Klein-Gordon, valida per un campo di spin 0, che nella forma più generale è completa di un termine di sorgente:

$$(\square + m^2)\varphi(x) = J(x)$$

Eq. 1-1

È noto che si possano ricavare le soluzioni della Eq. 1-1 ricavando la funzione di Green specifica del problema, ricavata assegnando le opportune condizioni al contorno all'equazione:

$$(\square + m^2)G(x) = -\delta^{(4)}(x)$$

Eq. 1-2

Ricordiamo che la soluzione generale dell'Eq. 1-1 ricomprende ovviamente anche la soluzione dell'equazione di KG omogenea φ_{omo} :

$$\varphi(x) = \varphi_{omo}(x) + \int d^4x' G(x-x')J(x')$$

Eq. 1-3

Per risolvere l'Eq. 1-2 si passa in trasformata che ha per argomento il quadrivettore $k_\mu = (k_0, \vec{k})$, le cui componenti sono tutte indipendenti:

$$\hat{G}(k) = \int d^4x G(x)e^{ikx} = -\frac{1}{k^2 - m^2}$$

Eq. 1-4

Che permette di ricavare, in funzione delle condizioni al contorno, la soluzione particolare dell'Eq. 1-1:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2} J(k)e^{-ikx}$$

Eq. 1-5

Con questa scelta k_0 spazza su campo reale da $-\infty$ a $+\infty$. L'integrale su k_0 non è però definito, perché l'integrando ha dei poli in corrispondenza delle condizioni di onda libera, per i quali sussiste una relazione precisa tra frequenza e modulo del vettore d'onda, ossia:

$$\omega_k = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Eq. 1-6

Ci sono però vari modi per "dare senso" a quest'integrale (considerandone ad esempio la parte principale): questo è conseguenza del fatto che, come già detto:

- ✓ la scelta della funzione di Green dipende dalle particolari condizioni al contorno che si intendono fissare;
- ✓ la condizione di annullamento della funzione di Green all'infinito non è sufficiente a fissarla in modo univoco.

È quindi la sede opportuna per applicare il teorema dei residui.

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=\text{poli} \\ \text{interni}}} \text{Res}(z_k)$$

$$\text{Res}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Eq. 1-7

Si tratta pertanto di capire la convenienza di scegliere un dato cammino da usare per by-passare i poli, tra i vari possibili:

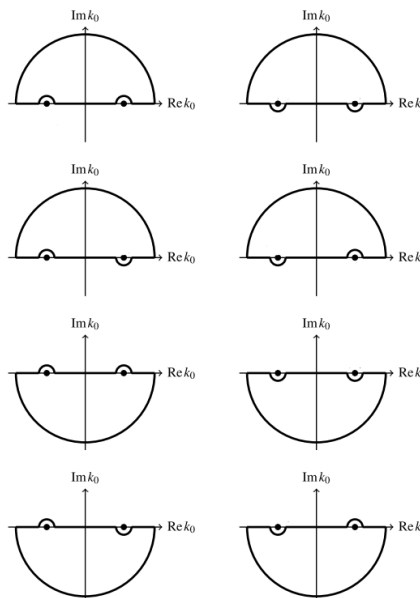
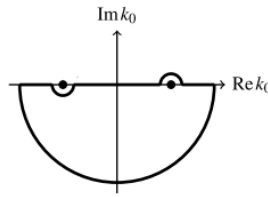


Figura 1. Possibili percorsi per by-passare i poli nell'estensione analitica su piano k_0 complesso

Per prima cosa osserviamo che, per garantire la convergenza dell'integrale, dove compare un $e^{-i(\text{Re}k_0 + i\text{Im}k_0)x^0} = e^{-i\text{Re}k_0x^0} e^{x^0\text{Im}k_0}$:

- Per $x^0 > 0$ il cammino va chiuso nel semipiano inferiore
- Per $x^0 < 0$ il cammino va chiuso nel semipiano superiore

Volendo calcolare la circuitazione su un polo alla volta, relativamente a quello positivo potremmo quindi scegliere la seguente deformazione di percorso.

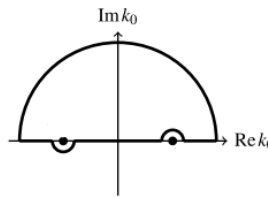


Per questo caso definiamo quindi l'integrale di questo cammino *orario* (da cui il segno meno nel residuo):

$$\begin{aligned}
 i\Delta_+(x) &\equiv i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2} e^{-ikx} = i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \oint_{k_0=+|\omega_k|} dk_0 \frac{1}{k^2 - m^2} e^{-ikx} \\
 &= i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k (-2\pi i) \text{Res}(\omega_k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2|\omega_k|} e^{-i(|\omega_k|t - \vec{k} \cdot \vec{x})}
 \end{aligned}$$

Eq. 1-8

Mentre per isolare il polo negativo la scelta può ricadere su questo percorso (percorso antiorario):



Definiamo allora, per futura comodità:

$$\begin{aligned}
 -i\Delta_-(x) &\equiv i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2} e^{-ikx} = i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \oint_{k_0=-|\omega_k|} dk_0 \frac{1}{k^2 - m^2} e^{-ikx} \\
 &= i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k (2\pi i) \text{Res}(\omega_k) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{-2|\omega_k|} e^{-i(-|\omega_k|t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \stackrel{\vec{k} \rightarrow -\vec{k}}{=} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2|\omega_k|} e^{-i(|\omega_k|t + \vec{k} \cdot \vec{x})} = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2|\omega_k|} e^{i(|\omega_k|t - \vec{k} \cdot \vec{x})}
 \end{aligned}$$

Eq. 1-9

Riassumendo, con il + (-) ci riferiamo alla parte positiva (negativa) della frequenza:

$$i\Delta_{\pm}(x) = \pm \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{\mp ikx}$$

Eq. 1-10

Applicazioni dei residui: introduzione alla condizione al contorno di Feynman

A cosa servono questi i due integrali che incorporano il calcolo dei residui ciascuno relativo ad uno dei due poli? Per il momento sappiamo che possiamo esprimere la soluzione dell'equazione Eq. 1-2 come una combinazione delle due che esprima le condizioni al contorno desiderate.

La condizione al contorno richiesta da Feynman è quella di considerare per il tempo positivo la soluzione a "frequenza positiva", per il tempo negativo la soluzione a frequenza negativa:

$$i\Delta_F = \theta(t)(i\Delta_+(x)) + \theta(-t)(-i\Delta_-(x))$$

Eq. 1-11

Calcoliamo dunque il propagatore di Feynman. A tal proposito dobbiamo ricordare che la funzione "gradino" di Heaviside può essere scritta in forma covariante:

$$\theta(t) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\eta}$$

Eq. 1-12

L'introduzione del termine $i\eta$ permette di chiudere il cammino sul semipiano superiore per $t > 0$, quindi effettuare una circuitazione antioraria inglobando il polo a tempi positivi.

Applicando la definizione delle funzioni Δ si ottiene:

$$i\Delta_F(x) = G(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left\{ \overbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\eta} e^{-ikx}}^{\theta(t)i\Delta_+(x)} + \overbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - i\eta} e^{+ikx}}^{-\theta(-t)(i\Delta_-(x))} \right\} =$$

$$\stackrel{\text{raccogliendo}}{=} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left\{ \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i(\omega - \omega_k)t}}{\omega - i\eta} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i(\omega - \omega_k)t}}{\omega - i\eta} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\}$$

Eq. 1-13

Si cambiano quindi gli estremi di integrazione. Nel primo integrale:

$$k_0 = \omega_k - \omega$$

Eq. 1-14

Nel secondo integrale invece:

$$k_0 = \omega - \omega_k$$

$$\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$$

Eq. 1-15

Si ottiene allora:

$$\begin{aligned}
i\Delta_F(x) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{dk_0}{2\omega_k} e^{-i(k_0 t - \vec{k}\vec{x})} \left\{ \frac{1}{\omega_k - k_0 - i\eta} + \frac{1}{k_0 + \omega_k - i\eta} \right\} = \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{2\omega_k} \left\{ \frac{k_0 + \omega_k - i\eta + (\omega_k - k_0 - i\eta)}{(\omega_k - k_0 - i\eta)(k_0 + \omega_k - i\eta)} \right\} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{2\omega_k} \left\{ \frac{2\omega_k - i2\eta}{\omega_k^2 - k_0^2 - i2\eta\omega_k} \right\} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left\{ \frac{1}{\omega_k^2 - k_0^2 - i2\eta\omega_k} \right\} \stackrel{\varepsilon = -2\eta\omega_k}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (+i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left\{ \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\varepsilon} \right\} = \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (+i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left\{ \frac{1}{k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2) + i\varepsilon} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (+i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}
\end{aligned}$$

Eq. 1-16

Dalla prima linea della Eq. 1-16 si realizza facilmente che i due poli si trovano in corrispondenza di:

$$k_0 = \pm(\omega_k - i\eta)$$

Eq. 1-17

Vediamo che la soluzione ad energia negativa ha il polo spostato sul semipiano complesso positivo, e viceversa.

Per quanto detto possiamo introdurre come argomento il quadrivettore differenza tra due eventi si ha:

$$i\Delta_F(x-y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (+i) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Eq. 1-18

Per costruzione l'operatore di Feynman è anch'esso inverso dell'operatore Klein-Gordon, quindi vale:

$$(\square + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$$

Eq. 1-19

Come abbiamo visto dalla sequenza di passaggi il termine infinitesimo $i\varepsilon$ implementa le condizioni al contorno: tali condizioni consistono nell'assumere che per $t > 0$ intervenga l'operatore Δ_+ , mentre per $t < 0$ abbia rilevanza l'operatore Δ_- .

Verifichiamo ancora che nel caso di frequenza positiva:

$$\begin{aligned}
i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k_0^2 - (\omega_k - i\eta)^2} &\stackrel{k_0 = +\omega_k - i\eta}{=} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} i(-2\pi i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_y) + \vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})}}{[\omega_k + (\omega_k - i\eta)]} = \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\omega_k(t_x - t_y) + \vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})}}{2\omega_k} = i\Delta_+(x-y)
\end{aligned}$$

Eq. 1-20

In cui il segno meno nel secondo passaggio deriva dalla differenza tra l'integrazione antioraria (necessaria per il calcolo del residuo) e quella oraria effettivamente utilizzata. Dunque la frequenza positiva è effettivamente associata all'elemento Δ_+ che non nullo quando la differenza di tempo è positiva.

Nel caso di frequenza negativa si ha invece:

$$\begin{aligned}
 i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k_0^2 - (\omega_k - i\eta)^2} & \stackrel{k_0 = -\omega_k + i\eta}{=} i(2\pi i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{+i\omega_k(t_x - t_y) + \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{-2\omega_k} = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\omega_k(t_x - t_y) + \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{-2\omega_k} \\
 & \stackrel{\vec{k} \rightarrow -\vec{k}}{=} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{2\omega_k} = -i\Delta_-(x-y)
 \end{aligned}$$

Eq. 1-21

2. Seconda quantizzazione e significato del propagatore di Feynman

Le soluzioni dell'equazione omogenea

Ricordiamo che l'equazione di Klein Gordon è ricavabile dalla relazione energia-impulso-massa operando il passaggio ai seguenti operatori nella rappresentazione delle coordinate:

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$$
$$\vec{p} = -i \vec{\nabla}$$

Eq. 2-1

L'interpretazione di K-G come equazione di singola particella porta ad alcune difficoltà: ad esempio non è possibile mantenere sempre una densità definita positiva (il problema è risolto nel caso di campo complesso, in cui la densità sarà associata non alla probabilità di singola particella, ma alla densità di una "qualche carica" trasportata). Inoltre la derivata seconda temporale porta alla presenza di soluzioni ad energia negativa in affiancamento a quelle - classicamente attese - ad energia positiva:

$$k^0 = \pm \omega_k = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Eq. 2-2

Avendo posto, per evitare ambiguità:

$$\omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Eq. 2-3

Per costruire la soluzione ed interpretarla in modo utile ai nostri scopi, proviamo a risolvere l'equazione di KG entro un volume cubico (di spigolo L), imponendo le condizioni al contorno, come ad esempio sull'asse x :

$$\varphi(t, x, y, z) = \varphi(t, x + L, y, z)$$

Eq. 2-4

La soluzione ad onde piane implica una condizione sulle componenti del vettore d'onda:

$$\begin{aligned} k^1 L &= 2\pi n^1 \\ k^2 L &= 2\pi n^2 \\ k^3 L &= 2\pi n^3 \end{aligned} \Rightarrow \vec{k} = \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}$$

Eq. 2-5

In cui n^i sono tutti i numeri interi relativi. Per ogni \vec{k} abbiamo quindi due onde piane, una a frequenza positiva e una a frequenza negativa, questo per la Eq. 2-2:

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{n}} N(\vec{n}) \left[a(\vec{k}) e^{i(-\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} + c(\vec{k}) e^{i(+\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right]$$

Eq. 2-6

In cui N è un fattore di normalizzazione. Nel secondo termine vogliamo rimuovere l'ambiguità della doppia soluzione sulla frequenza scegliendo di sommare su $-\vec{n}$ e definendo:

$$c(-\vec{k}) = b^+(\vec{k})$$

Eq. 2-7

In questo modo sia il termine a frequenza positiva che quello originariamente a frequenza negativa possono essere scritti in funzione di un unico invariante di Lorentz:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{\vec{n}} N(\vec{n}) \left[a(\vec{k}) e^{i(-\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} + b^+(\vec{k}) e^{i(+\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right] = \\ &= \sum_{\vec{n}} N(\vec{n}) \left[a(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^+(\vec{k}) e^{+ik_\mu x^\mu} \right] \end{aligned}$$

Eq. 2-8

Dove è stato posto:

$$k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$$

Eq. 2-9

Vogliamo adesso passare al limite del continuo. Utilizziamo a proposito per la composizione della soluzione questa particolare forma, che mostriamo fra un attimo essere Lorentz invariante.

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k) e^{-ikx} + b^+(k) e^{ikx} \right]$$

Eq. 2-10

L'invarianza di Lorentz si esplicita in particolare nel senso che:

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \stackrel{k'=\Lambda k}{=} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}$$

Eq. 2-11

Si può dimostrare la Eq. 2-11 partendo dalla seguente proprietà della funzione δ :

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=\text{zeri}} \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i)$$

Eq. 2-12

Vale allora l'identità nelle 4 dimensioni in cui il primo termine è manifestamente Lorentz-invariante (sotto gruppo proprio, ossia continuo dell'identità):

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - \omega_k^2) \stackrel{x=k_0}{=} \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)]$$

Eq. 2-13

Dunque si ha la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a(\vec{k}) e^{i(-\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} + b^+(\vec{k}) e^{i(+\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi) \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)] \theta(k_0) [a(\vec{k}) e^{i(-\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} + b^+(\vec{k}) e^{i(+\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) [a(\vec{k}) e^{i(-\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} + b^+(\vec{k}) e^{i(+\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}] \end{aligned}$$

Eq. 2-14

I fattori 2π sono stati scelti in coerenza con la definizione adottata di trasformata di Fourier; la funzione "gradino" di Heaviside ci assicura di utilizzare in entrambi i termini $\omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

Inoltre la funzione gradino su k_0 è un'invariante del gruppo di Lorentz proprio perché questo preserva il segno della componente 0, essendo connesso con l'identità.

Si ricorda che in questo modo si sta cercando di maneggiare in modo covariante la soluzione "a frequenza negativa", la cui presenza risiede nel secondo termine e manipolata attraverso la ridefinizione dell'argomento di integrazione (da \vec{k} a $-\vec{k}$). Con le scelte fatte è garantita ancora l'invarianza di Lorentz di entrambe le fasi.

Passaggio alla seconda quantizzazione

Nel passaggio alla seconda quantizzazione si tratta adesso di considerare non più la φ come una funzione classica, ma come un operatore (non Hermitiano per il caso di campo complesso), e assieme a questo saranno operatori anche gli a , a^\dagger , b e b^\dagger . Scriveremo anche, con un'opportuna e intuitiva notazione che distingue gli operatori di creazione/distruzione e le onde piane (rispettivamente soluzione d'onda a frequenza positiva e soluzione d'onda a frequenza negativa):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [a(k) \varphi^{(+)} + b^+(k) \varphi^{(-)}] \varphi = \varphi^+ + \varphi^- \\ \varphi^*(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} [b(k) \varphi^{(+)} + a^+(k) \varphi^{(-)}] = \varphi^{*+} + \varphi^{*-} \end{aligned}$$

Eq. 2-15

Con le regole di commutazione mutuete dal singolo oscillatore armonico:

$$[a(k), a^+(k')] = [b(k), b^+(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(k - k')$$

Eq. 2-16

Tali regole si possono evincere direttamente dalla commutazione campi-impulsi a partire dalla definizione della Lagrangiana a cui la Klein-Gordon è l'equazione di moto associata, quale ad esempio:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^* \varphi$$

Eq. 2-17

Da tale Lagrangiana si evince in particolare l'invarianza dell'azione sotto trasformazione globale U(1):

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow e^{i\theta} \varphi \\ \varphi^* &\rightarrow e^{-i\theta} \varphi^* \end{aligned}$$

Eq. 2-18

Da cui segue (Noether) la conservazione di una certa carica:

$$Q = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a^+(k)a(k) - b^+(k)b(k)) = N_a - N_b$$

Eq. 2-19

Il segno essendo convenzionale e qui scelto per coerenza "storica".

Risulta fisicamente plausibile che due operatori $\varphi^{(\pm)}$ in due punti diversi di spazio-tempo non si influenzino:

$$[\varphi^+(x), \varphi^+(y)] = [\varphi^-(x), \varphi^-(y)] = 0$$

Eq. 2-20

Microcausalità

Le relazioni di commutazione individuate forniscono soddisfano anche la richiesta di *microcausalità*: ci aspettiamo infatti che eventi separati da distanze di tipo spazio non possano condizionarsi l'un l'altro, e questo equivale a dire che misurazioni dei campi a due punti space-like non devono interferire. Questo ha un effetto diretto sul commutatore, che per due punti qualsiasi ha la forma:

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi^*(y)] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \{ [a(k), a^+(k')] e^{-ikx} e^{ik'y} + [b^+(k), b(k')] e^{ikx} e^{-ik'y} \} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \equiv i\Delta(x-y) \end{aligned}$$

Eq. 2-21

Trattasi chiaramente un'espressione Lorentz invariante (abbiamo già mostrato l'invarianza della misura di integrazione e le fasi sono espresse in forma 4-scalare). Per controllare se ci fornisce un risultato compatibile con l'ipotesi di microcausalità è sufficiente prendere due punti space-like per eccellenza, ossia quelli caratterizzati dallo stesso valore della coordinata temporale:

$$[\varphi(t, \vec{x}), \varphi^*(t, \vec{y})] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2\omega_k \left\{ e^{+i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \right\} \stackrel{\substack{\text{sostituzione} \\ \text{al secondo} \\ \text{membro} \\ \vec{k} \rightarrow -\vec{k}}}{=} 0$$

Eq. 2-22

Che conferma la nostra aspettativa. Da quanto mostrato risulta evidente che la condizione di microcausalità non potrebbe verificarsi (al di là del caso triviale di campo nullo ovunque) senza il contributo delle frequenze negative.

La funzione Δ può essere riscritta nella forma, anch'essa invariante sotto trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio:

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(k^2 - m^2) \text{sign}(k_0) e^{-ik(x-y)}$$

Eq. 2-23

Dove la funzione *sign* è banalmente il segno della frequenza:

$$\text{sign}(k_0) = \frac{k_0}{|k_0|}$$

Eq. 2-24

Trasporto di carica e propagatore di Feynman

Vogliamo adesso descrivere il processo per cui nel punto x si ha un apporto di carica -1 e nel punto y si ha un apporto compensativo di carica +1. Questo processo si può realizzare in differenti modi quali ad esempio questi due più semplici:

- a) La creazione di una a (apporto di carica +1) in y , trasportata in x e qui distrutta (per un apporto di carica -1).
- b) La creazione di una particella b (apporto di carica -1) in x , trasportata in y e qui distrutta (per un apporto di carica +1)

Il processo *a*) è rappresentato da:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\varphi(x)\varphi^*(y)|0\rangle &= \langle 0|\varphi^+(x)\varphi^-(y)|0\rangle = \langle 0|\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} a(\vec{k})a^+(\vec{k}')e^{-ikx}e^{ik'y}|0\rangle = \\
&= \langle 0|\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \left\{ a(\vec{k}), a^+(\vec{k}') \right\} - a^+(\vec{k}')a(\vec{k}) \Big\} e^{-ikx}e^{ik'y}|0\rangle = \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_k(t_x-t_y)-\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y}))} = i\Delta_+(x-y)
\end{aligned}$$

Eq. 2-25

Mentre il processo b) è rappresentato da:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\varphi^*(y)\varphi(x)|0\rangle &= \langle 0|\varphi^{*+}(y)\varphi^-(x)|0\rangle = \langle 0|\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} b(\vec{k})b^+(\vec{k}')e^{-iky}e^{ik'x} = \\
&= \langle 0|\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \left\{ b(\vec{k}), b^+(\vec{k}') \right\} - b^+(\vec{k}')b(\vec{k}) \Big\} e^{-iky}e^{ik'x}|0\rangle = \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{+i(\omega_k(t_x-t_y)-\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y}))} = -i\Delta_-(x-y) = i\Delta_+(y-x)
\end{aligned}$$

Eq. 2-26

In cui l'ultima uguaglianza si può dimostrare facilmente manipolando opportunamente gli integrali delle Δ . Ovviamente per ciascuno dei due casi si deve avere che il tempo di distruzione è *successivo* al tempo di creazione. Dunque l'ampiezza totale di questo fenomeno di trasporto di carica (e bilancio complessivo nullo) è data da:

$$G(x, y) = \theta(t_x - t_y)\{i\Delta_+(x - y)\} + \theta(t_y - t_x)\{i\Delta_+(y - x)\}$$

Eq. 2-27

Dove si riconosce chiaramente il propagatore di Feynman precedentemente definito. Conviene allora introdurre l'operatore di ordinamento temporale, che per definizione quando applicato a un campo bosonico agisce nel seguente modo:

$$T\{\varphi(x)\varphi(y)\} = \begin{cases} \varphi(x)\varphi^*(y) & t_x > t_y \\ \varphi^*(y)\varphi(x) & t_y > t_x \end{cases}$$

$$T\{\varphi(x)\varphi(y)\} = \theta(t_x - t_y)\varphi(x)\varphi(y) + \theta(t_y - t_x)\varphi(y)\varphi(x)$$

Eq. 2-28

In virtù di quanto detto si ha dunque:

$$G(x, y) = \langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle \equiv \theta(t_x - t_y)\{i\Delta_+(x - y)\} + \theta(t_y - t_x)\{i\Delta_+(y - x)\} = i\Delta_F(x - y)$$

Eq. 2-29

Secondo il modo presentato nell'Eq. 2-27 si ha che vengono propagati *in qualsiasi caso* solo stati ad energia positiva (a causa della presenza in entrambi gli addendi della Δ_+): il primo contributo descrive la creazione, propagazione e successivo riassorbimento di una particella a , che porta carica +1 da y a x . Il secondo la creazione, propagazione e successivo riassorbimento di b , ossia dell'antiparticella, che porta carica -1 da x a y .

A scanso di possibili equivoci confermiamo che l'antiparticella (b) viaggia *avanti* nel tempo ed è equivalente ad una particella di energia negativa che viaggia indietro nel tempo (la cui descrizione è evidente se si riformula il secondo termine in termini della funzione Δ). Ricordiamo che la scelta dell'assegnazione della nomenclatura di particella o antiparticella per a e b è puramente convenzionale.

Bibliografia

[1] L. Maiani, O. Behnar, "Meccanica quantistica relativistica", Editori Riuniti, 2012

[2]

https://it.wikitolearn.org/Corso:Elettrodinamica_classica/Soluzioni_delle_equazioni_di_Maxwell/Il_metodo_della_funzione_di_Green

[3] B. Hatfield, "Quantum Field Theory of Point Particles and Strings", Westview Press, 1992

[4] F. Mandl, G. Shaw, "Quantum Field Theory – Revised Edition", Wiley and Sons Ltd, 1984