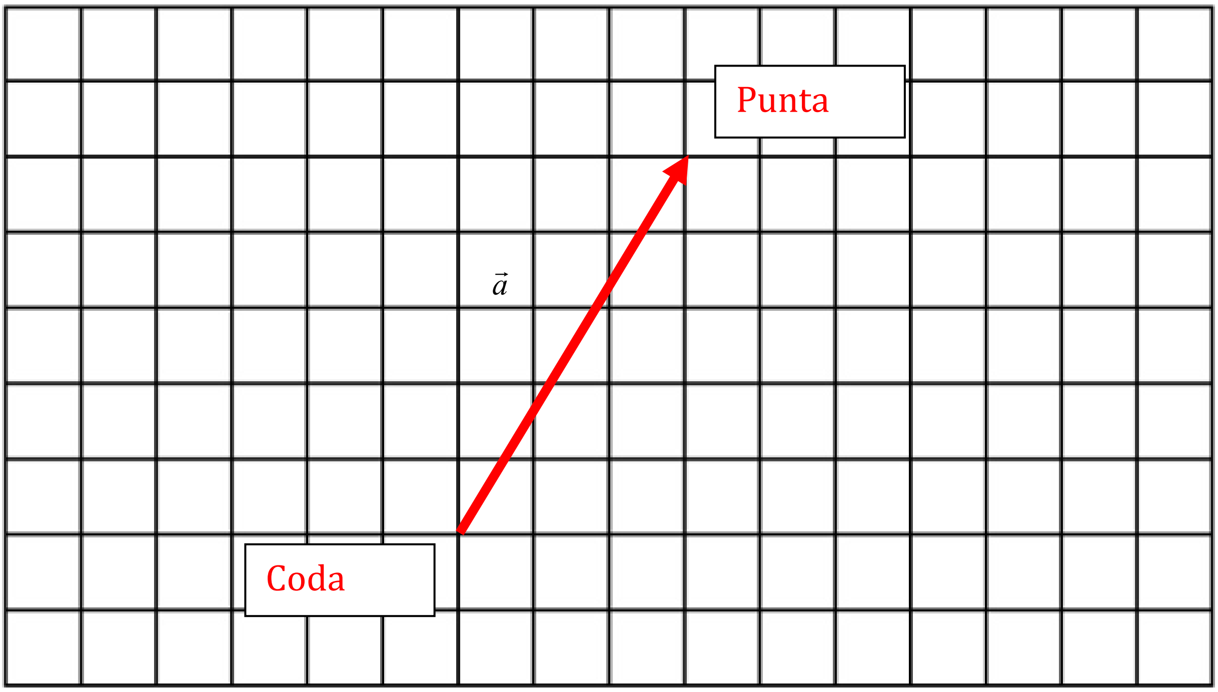
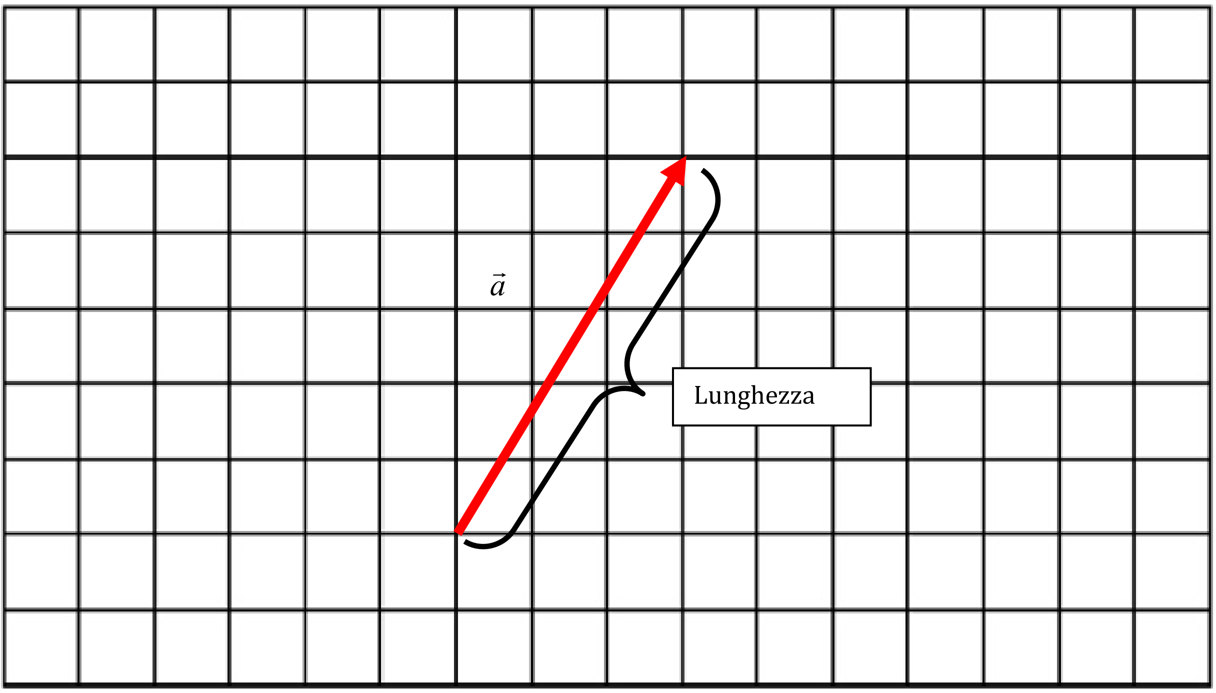
UNITÀ 2
CAP. 1 - VETTORI E OPERAZIONI CON VETTORI

Ci sono grandezze che non possono essere descritte solamente da un numero con un'unità di misura. Ad esempio la velocità: che senso ha dire di muoversi a 80 km/h, se non si specifica in quale direzione?
Grandezze di questo tipo si chiamano grandezze vettoriali: ossia quantità fisiche caratterizzate, oltre che da un valore, da una direzione precisa nello spazio. In questo modo ci danno tutte le informazioni necessarie per descrivere la grandezza fisica oggetto di studio.

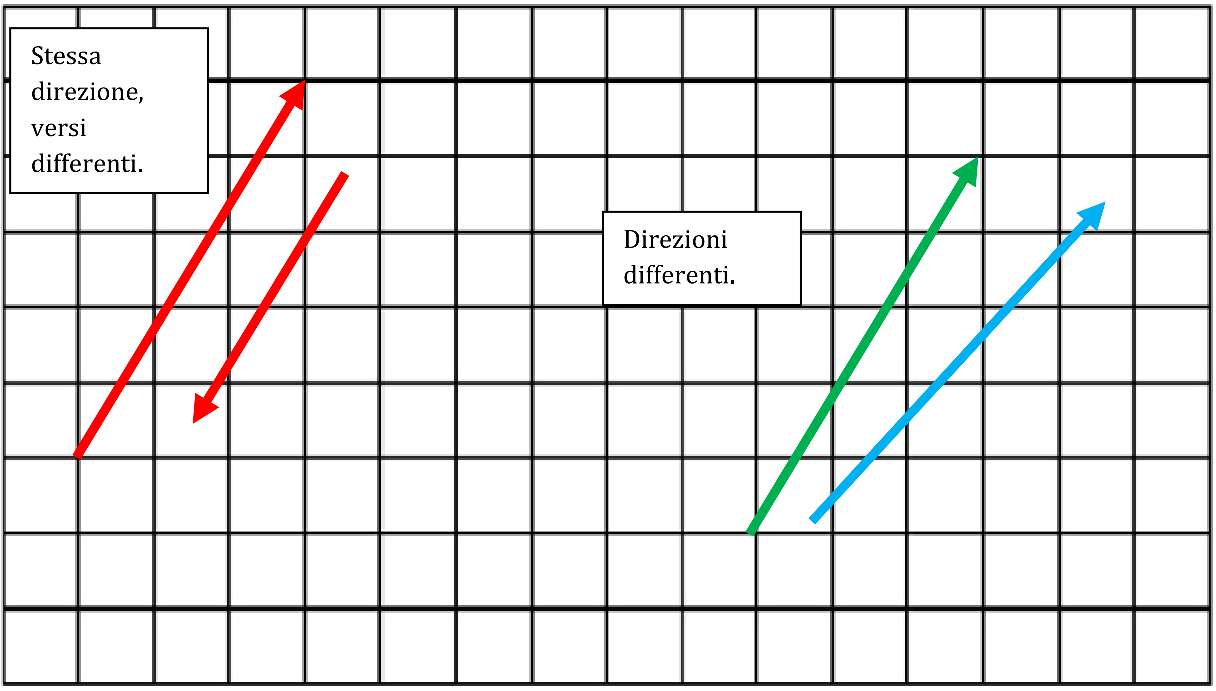
Ma cosa sono esattamente i vettori? Diamone una definizione da imparare a memoria: i **vettori** sono **oggetti matematici** rappresentabili come **frecce**, pertanto dotati di **lunghezza**, **direzione** e **verso**.
Vediamo per prima cosa un esempio di vettore (ad ogni vettore possiamo dare un nome con una lettera dell'alfabeto con una freccettina al di sopra di essa):



Per capire il significato della definizione appena fornita, analizziamo tutte le parole utilizzate.
La "**lunghezza**" del vettore è legata alla quantità fisica che stiamo indicando. Ad esempio un vettore che rappresenta una velocità di 80 km/h avrà una lunghezza doppia rispetto ad un vettore che ha una velocità di 40 km/h. Il valore numerico associato al vettore si chiama più propriamente "**modulo**" del vettore, ed è appunto rappresentato dalla sua lunghezza. Per non confondersi: sul foglio di quaderno la lunghezza effettiva del vettore sarà ad esempio in quadretti, ma ci sarà una corrispondenza tra i quadretti del foglio e l'unità di misura della grandezza che vogliamo rappresentare (vedi capitolo "equivalenze e conversioni").



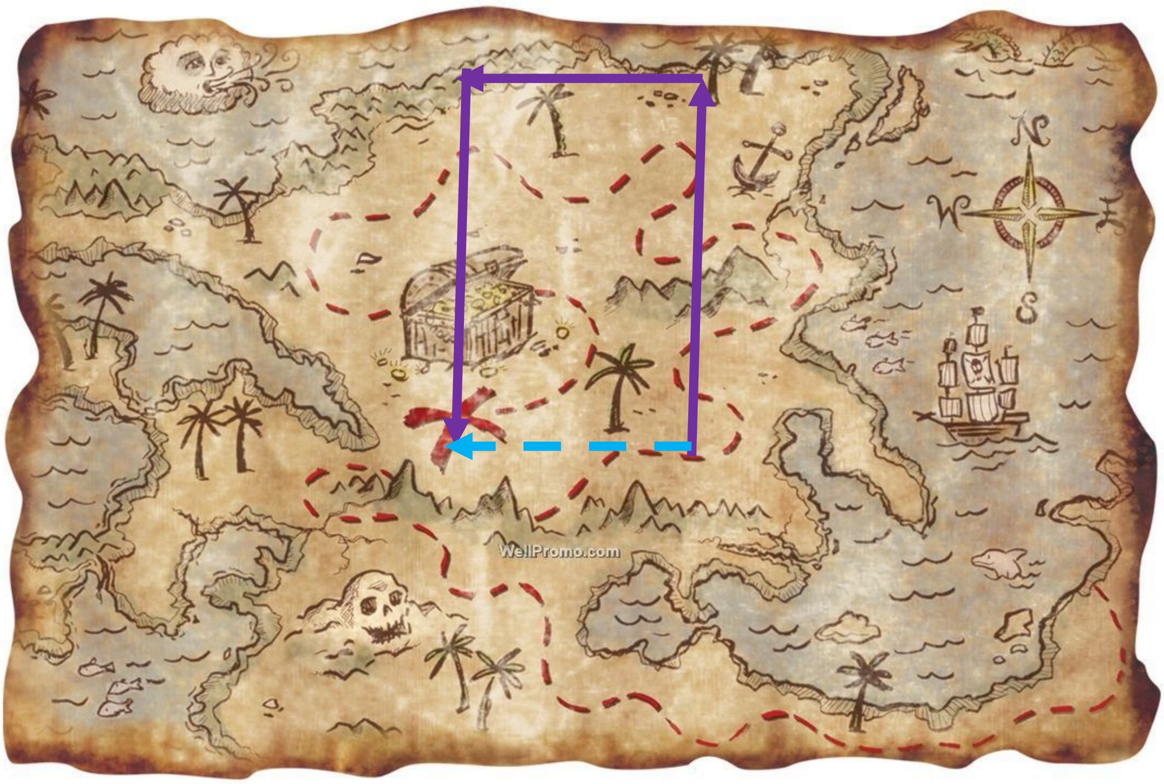
La "**direzione**" del vettore è data invece dalla retta a cui questo vettore è parallelo. Così in un piano parleremo di vettori orizzontali, verticali, obliqui. Infine il "**verso**" di un vettore è indicato dalla posizione della punta, ossia dove la freccia sta puntando.



Si deve sottolineare che per confrontare due vettori non è importante il punto dove si disegnano. Due vettori con stessa lunghezza, direzione e verso sono uguali anche se sono disegnati lontanissimi nel nostro foglio.

Abbiamo infine parlato di "**oggetto matematico**". In che senso diciamo ciò? Gli oggetti matematici ci permettono di fare operazioni tra loro, come ad esempio la somma.
Quindi se il vettore è veramente un oggetto matematico, dobbiamo poter eseguire la somma tra due vettori (e questa somma deve essere anch'essa un vettore). Cosa significa dunque sommare due vettori?

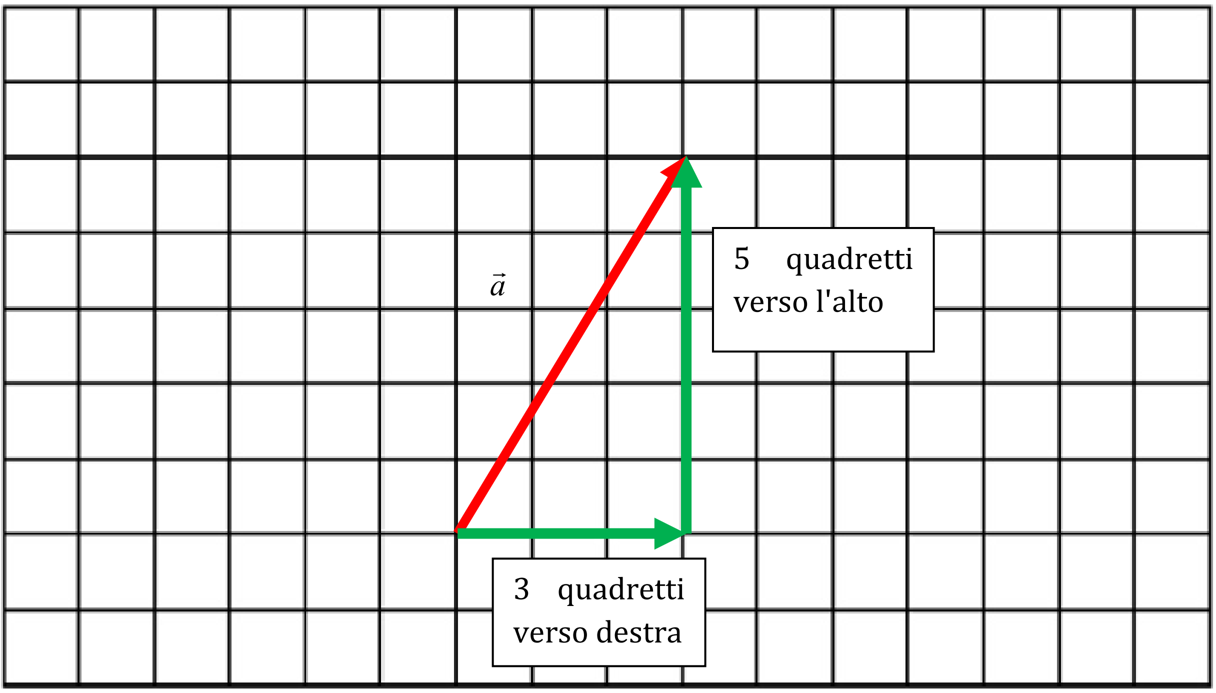
Per rispondere a questa domanda, utilizziamo l'esempio della mappa del tesoro.
Supponiamo che le istruzioni di come spostarsi alla ricerca del tesoro diano queste indicazioni: "muovetevi di 800 metri verso Nord; poi di 500 metri verso Ovest; infine di 800 metri verso Sud".
Ebbene, ciascuno di questi spostamenti può essere descritto da un vettore (vedi vettori viola in figura).



Spesso a lezione mi chiedono: "ma chi ha scritto la mappa non poteva semplicemente dire di muoversi subito di 500 metri verso Ovest, invece di fare tre movimenti diversi?". Ed hanno ragione, perché uno spostamento iniziale di 500 metri verso Ovest (vedi freccia azzurra tratteggiata) è analogo alla combinazione dei tre spostamenti descritti sopra.

Quindi diremo che la somma dei tre spostamenti è proprio il vettore 500 metri verso Ovest. Abbiamo dunque dimostrato che sommare vettori è possibile, e significa semplicemente metterli "in fila indiana", ciascuno con la coda posizionata sulla punta del vettore precedente: la somma è dunque un vettore che unisce la prima coda (=da dove sono partito) all'ultima freccia (=dove sono arrivato). La somma dei tre vettori viola è dunque il vettore azzurro.

Avendo definito in questo modo la somma possiamo dire che qualsiasi vettore può essere ricavato come combinazione di uno spostamento orizzontale e di uno verticale, partendo dalla coda.
Importante: quando scompongo un vettore nelle sue componenti orizzontale e verticale l'origine del sistema di assi va posta infatti proprio sulla sua coda. In altre parole non importa dove il vettore si trovi sul foglio: devo iniziare a "contare" sempre dalla sua coda.
Nella figura successiva si vede un esempio: il vettore rosso è costruito come spostamento orizzontale di 3 quadretti verso destra, seguito da uno spostamento verticale di 5 quadretti verso l'alto.



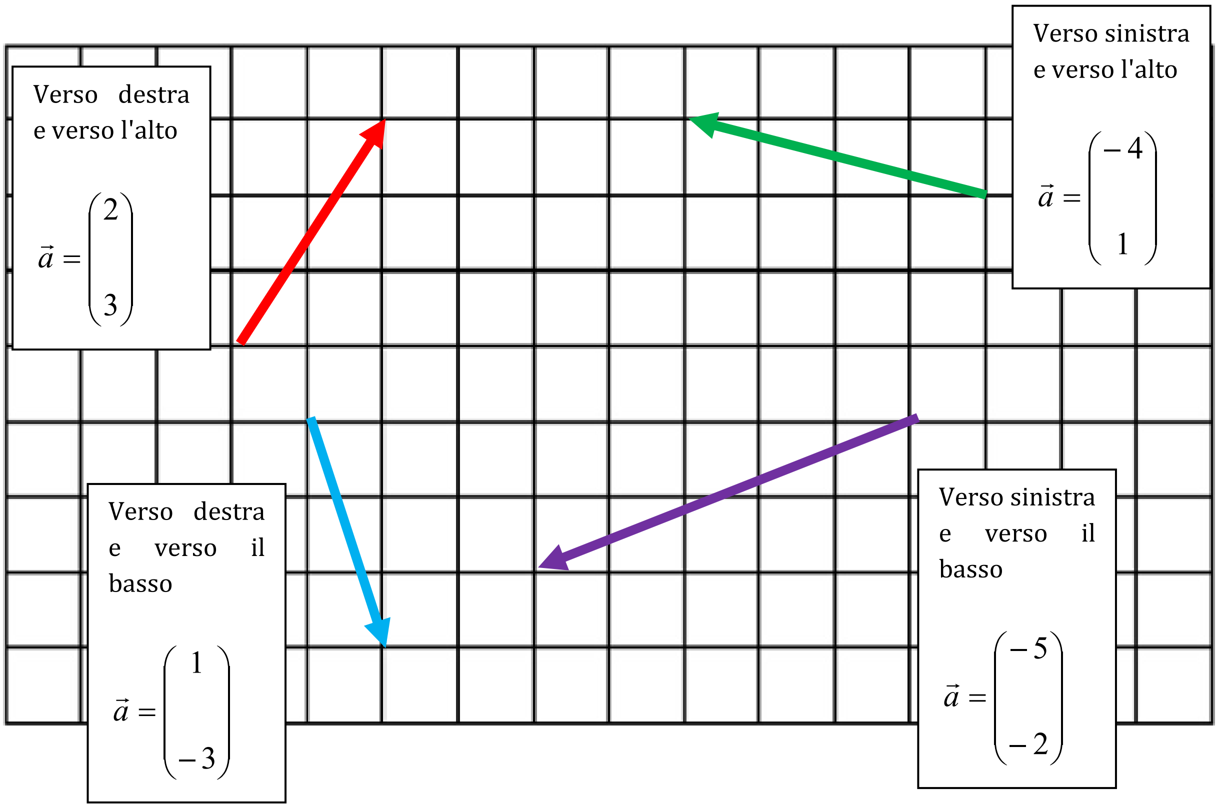
Diremo che lo spostamento **orizzontale** è **positivo** se procede **da sinistra verso destra**, negativo in caso contrario (è sufficiente pensare che il verso positivo è quello della scrittura in Italiano).
Analogamente diremo che lo spostamento **verticale** è **positivo** se procede **verso l'alto**, mentre negativo in caso contrario (basta pensare ai piani di un palazzo: quando scendo sotto terra i piani hanno il segno "meno").
Lo spostamento orizzontale e quello verticale che compongono il vettore possono essere messi in colonna, mettendo per primo lo spostamento orizzontale. Nell'esempio precedente si ha dunque:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ 5 \end{pmatrix}$$

In pratica un vettore in un piano può essere sempre scritto come combinazione di questi due spostamenti, ricordando l'ordine giusto (primo numero spostamento orizzontale) e il segno giusto:

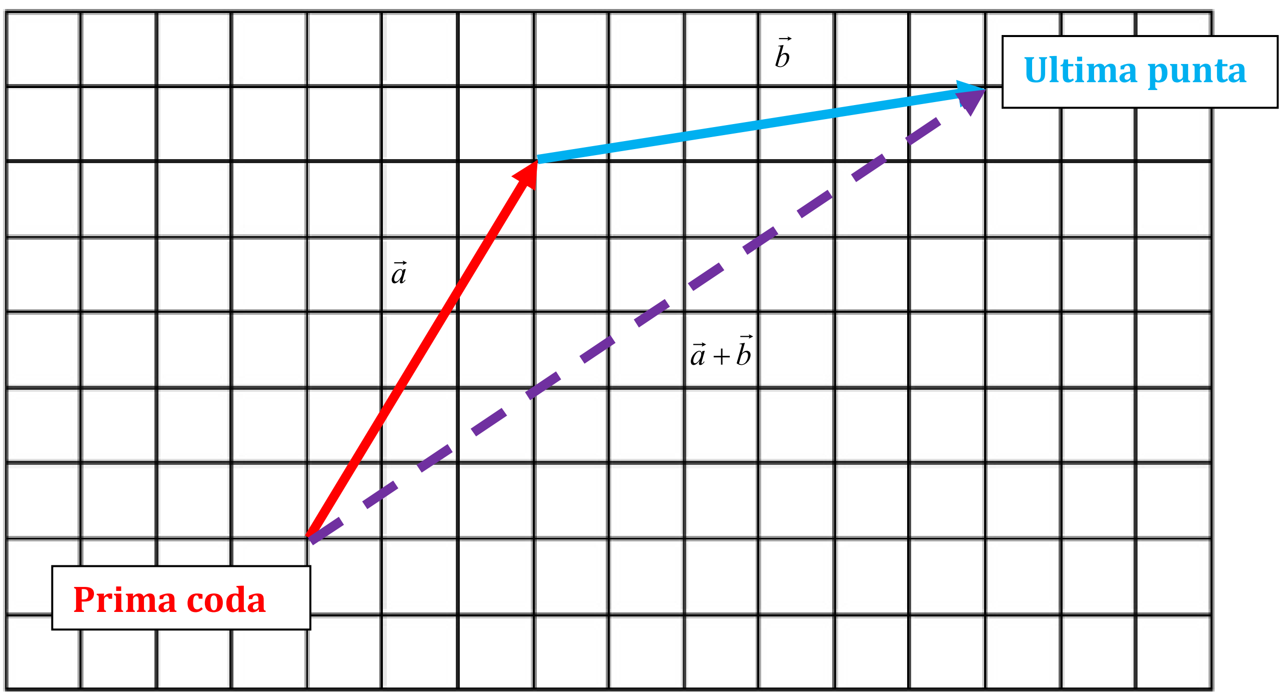
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \text{positivo se va verso destra} \\ \\ \text{positivo se va verso l'alto} \end{pmatrix}$$

Vediamo alcuni esempi nella figura successiva.



Diremo che un vettore può essere rappresentato, oltreché graficamente da una freccia, anche come una colonna di numeri (le sue **componenti**).

In che modo questo può facilitare i nostri calcoli sulla somma di due vettori? Ricordiamo che **sommare due vettori significa metterli in fila indiana e considerare un vettore totale che congiunge la prima coda in direzione dell'ultima punta:**



Allora ci si può convincere che il risultato ottenuto con il metodo grafico è perfettamente equivalente a quello che si ottiene scrivendo un vettore di questo tipo:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

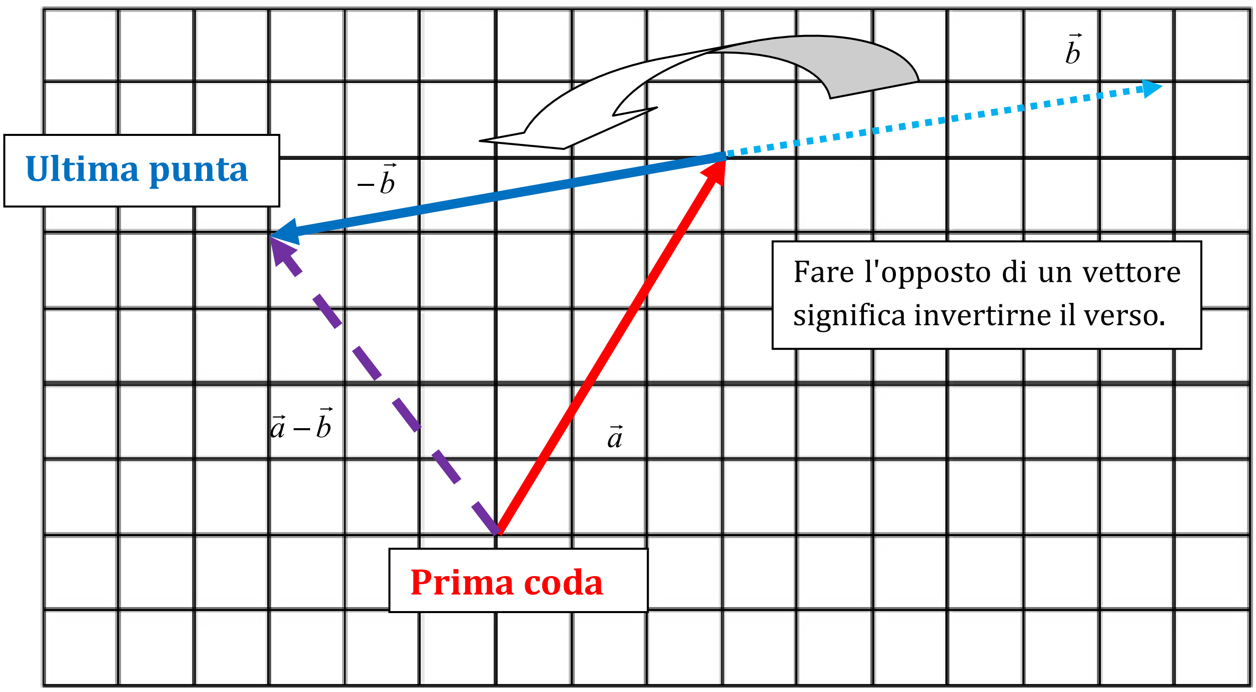
Ossia si scopre che i vettori si sommano componente per componente! Mostrarlo è abbastanza intuitivo: il primo vettore mi spostava orizzontalmente di 3, mentre il secondo di altri 6. Quindi in totale mi sono spostato di 3+6. E così per la parte verticale.
Poiché dunque si fa la somma per calcolare tutte le componenti, vale la proprietà commutativa in generale: invertendo l'ordine degli addendi nella somma si ottiene lo stesso risultato.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

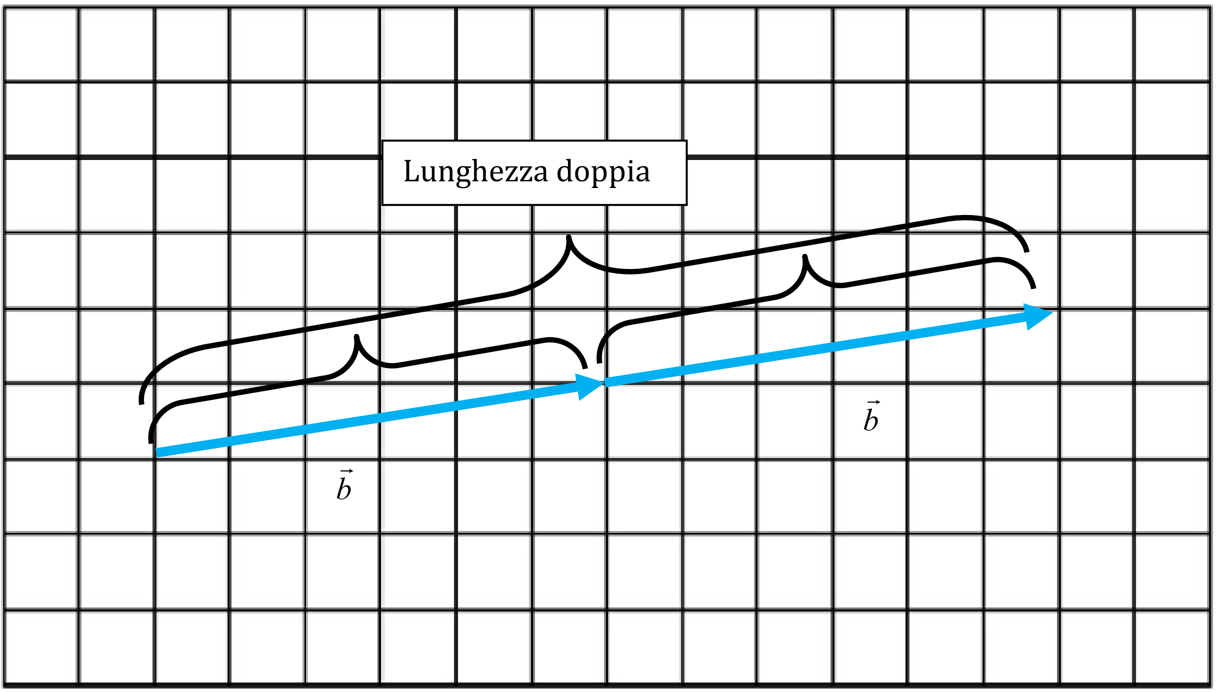
Ovviamente con la stessa regola algebrica possiamo pensare di sottrarre due vettori:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo di non aver paura delle componenti negative: ci sono ogni volta in cui la sottrazione su una certa riga dà un numero minore di zero.
Dal momento che sottrarre due numeri (o due vettori) significa sommare al primo l'opposto del secondo, si può anche pensare che la differenza tra due vettori sia data da questo procedimento:



Vediamo infine prodotto e rapporto di un vettore per un numero, con un esempio.
Moltiplicare per 2 un vettore significa sommare un vettore a se stesso:



Il vettore dunque moltiplicato per un numero lascia invariata la propria direzione, mentre moltiplica la sua lunghezza.
Di conseguenza questa operazione si ripercuote sulle coordinate. Ad esempio:

$$2 \cdot \vec{b} = \vec{b} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Al contrario dividere un vettore per un numero significa dividere tutte le sue componenti per tale numero. Ricordiamo che l'operazione di divisione è inversa al prodotto. Vediamo dunque tutti i modi per scrivere questo:

$$\vec{d} : 2 = \frac{\vec{d}}{2} = \vec{d} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} : 2 = \begin{pmatrix} 6:2 \\ 2:2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque se ad esempio divido un vettore per 2, questo dimezza la propria lunghezza ma lascia invariata la direzione.