

Questi scritti derivano dall'osservazione di bambini dai 3 anni in su. Osservazione che poi ha dato origine a riflessioni, spesso anche divergenti, sul significato dei numeri e della matematica.

I numeri delle pecore: una riflessione sui numeri naturali

(ovvero: si può parlare di numeri senza numeri?)

Luca Alfinito, maggio 2020

Se mi chiedessero di raccontare dove tutta la matematica ha avuto inizio, comincerei... dai **numeri delle pecore**. I numeri delle pecore – chiamiamoli proprio così – iniziarono ad essere usati perché nell'antichità le pecore erano molto importanti, ed ogni pastore aveva esigenza di *mantenere* il proprio gregge. Come fare ad esempio a sapere se *tutte* le pecore erano ritornate all'ovile, al termine del giorno?

Un pastore particolarmente affezionato avrebbe potuto dare un nome ad ogni pecora: Clarabella, Clarabrutta, Clarissa, Clarina, Bianchina, Bianca, Morbidella ecc. ecc... Mi immagino il pastore spingendo le pecore nel recinto, alla sera, salutarle così: "Ciao Bianchina, forza Clarabella, dentro, su" e man mano che ogni pecora riconosciuta entrava nel recinto il brav'uomo segnava una "X" o una spunta qualsiasi accanto al nome dell'animale nell'elenco. In questa soluzione non compare nessun numero, e lo scopo veniva raggiunto ugualmente con successo.

Questo esercizio richiede però molta pazienza e capacità del pastore di ricordare i dettagli che *distinguono* una pecora da una sua qualsiasi compagna (per me le pecore sono tutte uguali). Insorgeva poi un altro problema: quando il pastore affidava il gregge ad un collega o anche al figlio, persone non pratiche nel riconoscere le sue pecore, come poteva essere sicuro di controllare lo stesso l'integrità del gregge? Fu per risolvere questo dubbio, probabilmente, che venne introdotta una nuova idea: cominciare a *contare*.

Ma quale o quali significati si nascono dietro alla parola "contare"? Per gli adulti questo concetto è talmente radicato che non viene più messo in discussione, ed applicato con disinvoltura nei vari contesti. Ci potremmo domandare allora: e per i bambini è ancora così? Ma procediamo con ordine.

La prima cosa che possiamo pensare per arrivare ad un'astrazione del concetto di contare è quella di rinunciare ad assegnare ad ogni pecora che entra nel recinto il suo nome corretto: non riconoscendo chi è Clarissa e chi è Bianchetta, ad ogni entrata nel cancello si spunta un nome a caso. Cosa importa che sia entrata prima Morbidella, o Clarabrutta: l'importante è che alla fine tutti i nomi siano stati spuntati. Notevole passo in avanti, possiamo ammettere, soprattutto perché in questo caso anche il figlio disaccorto del pastore sarebbe in grado di verificare se tutte le pecore sono tornate o no, anche se non è in grado di riconoscerle. E allora poniamoci un ulteriore dubbio: con questo metodo siamo sì in grado di verificare se il gregge sia rimasto integro o no, ma cosa dobbiamo dire se al momento della chiusura del cancello al termine del nostro controllo qualche nome nella lista è rimasto senza spunta?

Accudire un gregge di pecore significa investire le proprie risorse personali, la propria fatica, il proprio *tempo* della giornata. Come ricompensa avremo lana e latte. Se all'appello mancano alcuni nomi, mi ritroverò del tempo libero che non avevo, e forse quando vorrò bere il latte munto potrei non riuscire a dissetarmi. Potrebbe non bastare per dissetare la famiglia del povero pastore. Occorre dunque un metodo

più efficace per descrivere lo stato del mio gregge anche quando non è integro, se non altro al fine di conoscere meglio le risorse effettive di cui potrò disporre.

Facciamo quindi un ulteriore avanzamento concettuale: rimettiamoci nei panni del “buon pastore”, per intendersi quello che riconosce le proprie pecore chiamandole con il loro vero nome, e chiediamogli di immaginare tutte le possibilità che potrebbero avverarsi al momento del controllo finale, alla sera. Pensiamo ad esempio: presenti Clarissa e Clarabella, assenti le altre. Oppure: presenti Bianchina e Clarissa e tutte le altre assenti, o ancora presenti Bianchina, Clarissa e Clarabella, le altre no. In pratica stiamo ricostruendo – con un po’ di pazienza - tutte le possibili *configurazioni* della lista spuntata. Ogni possibile configurazione può essere rappresentata nel seguente modo: si disegnano su un foglio tutte le pecore, ciascuna con il proprio nome, e si traccia un recinto (*chiuso*) che contenga nel foglio solo le pecore effettivamente ritornate. Si ripete poi il disegno finché tutte le possibilità sono esaurite.

Pensiamo adesso di assegnare un *nome* alle varie configurazioni. Ad esempio chiamiamo “zero” quella più triste, ossia quella per cui non ci sono pecore nel recinto. Non importa nemmeno dove e come tale recinto viene disegnato sul foglio: ciò che è importante è che il recinto non contenga pecore. Ora il pastore sa che la situazione “zero”, oltre ad essere quella più penalizzante, è ovviamente diversa da tutte le altre e non coinvolge particolari nomi di pecore. Invece basterebbe, che so, che Morbidella fosse entrata, oppure Bianca, o anche loro insieme, e non ci troveremmo più nello stato zero, quello senza latte né lana. Visto che abbiamo capito quali saranno i nomi delle situazioni (ossia i numeri naturali), ci chiediamo quale o quali siano le configurazioni che possiamo chiamare “uno” (ma potevamo chiamare anche Pippo, ad esempio). Per quanto detto l’insieme di configurazioni che diremo corrispondenti alla situazione “uno” sono sicuramente differenti dalla configurazione zero: stavolta posso bere latte, nell’altro caso no.

Possiamo allora immaginare allora la situazione “tipo” in cui non ci sono compagne che possano interagire con la pecora che vediamo nel recinto, e ci rendiamo subito conto che questa situazione corrisponde a *più configurazioni possibili* che rispondono tutte in modo differente alla domanda: *chi* è quella pecora che è entrata? Clarabella? Clarabrutta? Ci sono dunque più configurazioni che si riferiscono alla situazione “uno”: diremo allora che esiste una *classe di equivalenza* di configurazioni, tutte caratterizzate dal fatto che la pecora entro il recinto, chiunque essa sia, rischia di annoiarsi perché tutte le altre sono chissà dove fuori dal recinto stesso (questo ammesso ovviamente che le pecore si annoiano quando non stanno insieme).

Una volta definita la situazione “zero” e l’insieme di configurazioni equivalenti alla situazione “uno” posso continuare. Ad esempio la situazione “due” è rappresentata dal mettere insieme nello stesso recinto la situazione “uno” con una nuova situazione “uno”. Si può pensare di aver trovato e recintato la mia pecora di partenza da qualche parte, mentre un nostro amico ha trovato la potenziale compagna altrove, l’ha portata fino a noi e le abbiamo ricongiunte nel medesimo recinto. Ovviamente la situazione “due” corrisponde a un sacco di configurazioni (immaginiamo un gregge molto grande): Clarina e Bianca, Clarabella e Morbidella, Clarissa e Bianchina, ecc. ecc.

Quello che è importante è che in questo schema il nome “due” non è attaccato ad una pecora che è entrata dopo la pecora “uno”, ma ad una situazione *di insieme*. Due ha senso solo come aggregazione di uno con uno. E così via. Contare significa allora definire una corrispondenza tra i nomi che scelgo per le situazioni (uno, due, tre...) e le possibili classi di equivalenza di raggruppamenti che posso costituire con le pecore del mio gregge.

In che senso quindi questa definizione mi viene in aiuto? Perché quando il figlio del pastore constaterà che non sono ritornate tutte le pecore del gregge spuntando la lista di nomi delle pecore (anche assegnando tali

nomi a caso agli animali entranti nel recinto), sarà in grado di dire quale precisa configurazione si è verificata, quindi conoscerà anche il nome della situazione di riferimento (in definitiva: qual è il numero di pecore che ancora possiede).

Mi limito ad osservare, per inciso, che viene qui messo in gioco un differente senso di ordinamento: da quello cronologico, ossia pensare ai numeri vedendo le pecore passare in sequenza nel tempo attraverso il cancello del recinto e attribuendo a ciascuna un numero, a quello *insiemistico*: la situazione di recinto corrispondente ad un numero superiore contiene sempre quelle dei numeri inferiori (anche se unire i recinti è un'operazione che ha ancora un prima e un dopo, quindi pare che da una sequenza temporalmente ordinata non possiamo scappare nemmeno con questo schema). Questo cambio di paradigma a mio avviso è utile perché nella mente di un adulto ordinamento temporale e ordinamento numerico sono concetti sovrapposti al punto da essere praticamente indistinguibili: e ad oggi non so decidere ancora se questo sia l'unico punto di vista possibile, e soprattutto se vi sia un concetto *dominante* tra i due. Chiudiamo parentesi.

Può essere introdotto in modo quasi indolore il senso dell'operazione aritmetica di "somma" (o *composizione*), che corrisponde all'azione di unire recinti diversi. Notiamo subito, nel caso del gregge del nostro pastore, che se la pecora "Dolly" è già dentro al recinto non vi può essere riaggiunta: quindi non tutte le configurazioni sono sommabili, ma le situazioni sì, nel loro rappresentare l'equivalenza di una *classe* di configurazioni. Inutile dire che aggiungendo una situazione "monopecora" alla volta si può andare avanti virtualmente per sempre... come ci insegna Peano.

Similmente l'operazione di "sottrazione" può essere vista come l'azione di allontanare un certo numero di pecore dal recinto (nella lista si potrebbero ad esempio cancellare le spunte precedentemente fatte; oppure, meglio, le pecore allontanate possono essere messe, prima dell'espulsione definitiva dal gregge, in un secondo recinto isolato per aver ben chiara la situazione, ossia il numero, che andiamo a sottrarre). Può essere anche utile considerare l'operazione sottrazione come *differenza* o *distanza*, ossia in senso inverso quante pecore si devono introdurre ad una certa situazione (diciamo B) per ottenere quella finale (che chiamiamo A).

L'idea di somma esposta emerge in modo curioso quando si osserva un bambino contare il risultato di due dadi. Procediamo come segue: facciamo lanciare un solo dado al bambino, e lo osserveremo contare i puntini sulla faccia uscita (almeno questo fino all'età in cui non riconosce visivamente il "disegno" sulla faccia, attribuendone subito il numero corrispondente). Immaginando che il nostro bambino abbia circa quattro anni facciamogli quindi tirare un secondo dado e chiediamoci: che procedimento seguirà per comunicarci il risultato di unione dei due "recinti di puntini"? Sorprendentemente – per un adulto – il bambino ricomincia a contare da capo, dal primo dado. Poco importa che un attimo prima abbia contato ad esempio sei puntini sullo stesso dado, il bambino ricomincerà come se il risultato finale fosse un nuovo gregge, riunito dai due singoli greggi dei quali dimentica la precedente esistenza individuale ed indipendente. Sorprendente, no?