

Principi di invarianza e simmetrie discrete dalla meccanica classica alla seconda quantizzazione

Parte 1 - la Parità

Luca Alfinito, aprile 2020

1. Introduzione

Personalmente ho sempre trovato difficile sistemare l'impalcatura concettuale delle simmetrie, proprio a causa delle due possibili interpretazioni contrapposte che si possono attribuire ad una data trasformazione. Questa infatti può essere pensata agire:

1. Sul sistema di riferimento (e quindi di coordinate) che descrive un dato sistema fisico, oppure
2. sul sistema fisico lasciando fisso il sistema di riferimento di partenza

I due punti di vista sono ovviamente mutuamente esclusivi, e adottare l'una o l'altra interpretazione dipende dal tipo di problema e da ciò che si intende mettere in evidenza. Si pensi alle rotazioni: nel caso 1) sto lasciando fermo l'apparato sperimentale e sto girando io (per esempio in senso antiorario), nel caso 2) io rimango fermo e ruoto l'apparato in senso orario.

L'idea base dell'**invarianza** di una data legge fisica che governa il sistema, in entrambi i casi, è che lasciando evolvere la situazione trasformata (sia essa nel sistema stesso o a causa della trasformazione del riferimento) questo è equivalente a lasciare evolvere la situazione base e trasformare alla fine. In altre parole, se φ è una qualsiasi funzione che rappresenta lo stato del sistema, si deve avere un diagramma commutativo tra simmetria (R) ed evoluzione temporale (U):

$$\begin{array}{ccc} \varphi_0 & \xrightarrow{\text{evoluzione}} & U(t)\varphi_0 \\ \downarrow R & & \downarrow R \\ R\varphi_0 & \xrightarrow{\text{evoluzione}} & U'(s)(R\varphi_0) = R(U(t)\varphi_0) \end{array}$$

Eq. 1-1

Abbiamo messo un apice ad U ed usato un parametro temporale diverso s perché ad esempio "nel mondo dello specchio" si potrebbe avere una fisica differente. Consideriamo adesso il punto di vista n. 1, che si traduce nelle seguenti condizioni: se abbiamo un riferimento S e un altro ad esso equivalente S' , con lo stato descritto da grandezze differenti (rispettivamente G_i e G'_i), allora:

- a) L'insieme dei valori possibili di G_i coincide con quello di G'_i ;
- b) Se $G'_i(0) = G_i(0)$ nei due riferimenti avremo la stessa evoluzione temporale $G'_i(t) = G_i(t)$.

Mantenendo quindi questo punto di vista costruiamo un nuovo stato la cui *descrizione* sia, nel nuovo sistema di riferimento, esattamente identica a φ_0 . Se c'è invarianza ci aspettiamo che nel nuovo sistema di riferimento questo stato evolva esattamente come farebbe il suo omonimo nel vecchio sistema, ossia in termini di operatori:

$$U'(s)\varphi_0 = U(t)\varphi_0$$

Eq. 1-2

Questo si può verificare se:

$$U'(s) = U(t)$$

Eq. 1-3

Incorporando inoltre i risultati precedenti nel diagramma commutativo si conclude inoltre che se si ha invarianza l'evoluto del trasformato coincide con il trasformato dell'evoluto:

$$\underbrace{U'(s)(R\varphi_0)}_{U(t)(R\varphi_0)} = R(U(t)\varphi_0) \Leftrightarrow [U(t), R] = 0$$

Eq. 1-4

Poiché è noto che l'evoluzione temporale dipende dall'Hamiltoniana, diremo in particolare che, anche nel caso generale di dipendenza dal tempo, la condizione di invarianza su una data simmetria è:

$$[H, R] = 0$$

Eq. 1-5

Tale condizione può essere espressa come condizione sul generatore della simmetria:

$$[H, g] = 0$$

Eq. 1-6

Questa condizione in particolare ci assicura che i due operatori possano essere diagonalizzati simultaneamente.

L'equivalenza di un classe di sistemi di riferimento rispetto ad un insieme di fenomeni si chiama invarianza di tali fenomeni rispetto al gruppo di trasformazioni che legano tali sistemi (esempi di possibili simmetrie continue: invarianza per rotazioni, per traslazioni spazio-temporali, boost, ecc.)

2. Simmetrie discrete in meccanica classica

Cerchiamo di comprendere meglio attraverso l'esempio più semplice possibile, ossia di particella classica in una dimensione in presenza di un potenziale conservativo. L'Hamiltoniana sarà:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Eq. 2-1

Con le condizioni iniziali, espresse come q_0 e p_0 . Consideriamo per adesso una trasformazione di coordinate e impulsi, tutte variabili indipendenti:

$$Q = Q(q, p, t)$$

$$P = P(q, p, t)$$

Eq. 2-2

Ricordiamo per prima cosa che non tutte le trasformazioni pensabili sono *canoniche*, ossia tali da mantenere la forma delle equazioni del moto nelle varie variabili [Landau 1, pag. 209]:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}$$

Eq. 2-3

La condizione affinché ciò succeda si traduce nell'esistenza di una funzione generatrice F per la quale, tra le varie proprietà:

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Eq. 2-4

Riprodurre nel nuovo sistema le condizioni dello stato equivale a fissare:

$$Q_0 = q_0$$

$$P_0 = p_0$$

E l'invarianza implica che l'evoluzione di Q e P sia la stessa di q e p nel vecchio. Tale circostanza è chiaramente realizzata se:

$$H'(q', p') = H(q(q', p'), p(q', p')) = H(q', p')$$

Eq. 2-5

Ossia l'Hamiltoniana è invariante in forma.

Parità

Vogliamo considerare l'approccio n. 1, ricordando però che la descrizione di qualsiasi "vecchio" stato nelle nuove coordinate (identificate con l'apice), ossia il passaggio da vecchie a nuove coordinate si realizza:

$$Q = -q$$

$$P = -p$$

$$t' = t$$

Eq. 2-6

Osserviamo subito che essendo la Hamiltoniana classica quadratica nell'impulso, questa variabile non è ostativa all'invarianza per parità. Tutto quindi dipende nel nostro caso solo dalla forma del potenziale, funzione unicamente di q . Infatti:

$$H(Q, P) = \frac{[p(P)]^2}{2m} + V(q(Q)) = \frac{P^2}{2m} + V(-Q)$$

Eq. 2-7

In questo caso l'invarianza per parità sussiste solo se V è una funzione pari. Se invece ipotizziamo una dipendenza antisimmetrica del potenziale, ad esempio:

$$V(q) = aq \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q} = -a$$

Eq. 2-8

Mentre per l'inversione di parità.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{dt} = \frac{d(-q)}{dt} = \frac{-\partial H(q, p)}{\partial p} = \frac{-\partial H(-Q, P)}{-\partial P} = \frac{\partial H(-Q, P)}{\partial P} = \frac{P}{m} \\ \frac{dP}{dt} = \frac{-dp}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} = \frac{\partial H(-Q, P)}{\partial(-Q)} = -\frac{\partial H(-Q)}{\partial Q} = +a \end{array} \right.$$

Eq. 2-9

Cerchiamo però di non innamorarci delle formule, provando a “vedere” la fisica che si cela dietro alle equazioni. Nel riferimento S il potenziale era rappresentato da una retta con pendenza crescente a , quindi una particella ferma (in qualsiasi punto) avrebbe iniziato a scivolare verso sinistra. Nel mondo “ribaltato”, invece, il potenziale ha la pendenza opposta ($-a$) e la particella ora scivola verso destra. In questo caso dunque non c'è invarianza per parità, conseguenza del potenziale anch'esso specchiato; altro caso sarebbe stato, ad esempio, una dipendenza quadratica.

Per completare la digressione sulla parità consideriamo il caso dei vettori assiali o pseudovettori, come il momento angolare, che sappiamo essere il generatore della rotazione e classicamente vale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Eq. 2-10

Per analizzare l'effetto della parità conviene utilizzare il punto di vista 2, (cambia la configurazione del sistema in una nuova ugualmente possibile) e ribaltare lo stato. Dalla semplice osservazione della seguente figura è facile convincersi del fatto che la parità non cambia il verso di rotazione:

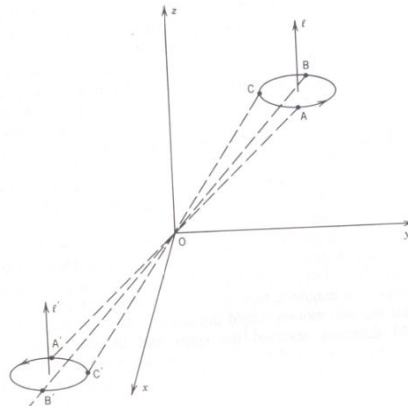


Figura 1. Il ribaltamento conserva il momento angolare, quindi lo spin

Di questa cosa si ha evidenza considerando che relativamente alla configurazione variata (n) si ha:

$$\begin{cases} \vec{r} \rightarrow -\vec{r} \\ \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \end{cases} \Rightarrow \vec{L}_n = \vec{r}_n \times \vec{p}_n = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$$

Eq. 2-11

Ossia la trasformazione sullo stato non varia il valore momento angolare, quindi il verso di rotazione. Osserviamo invece che la difficoltà di visualizzare l'esempio secondo l'interpretazione n. 1 (il mondo in cui tutte le 3 dimensioni sono "riflesse") deriva dal fatto che per una trasformazione di parità una terna levogira diventa destrogira, quindi per ottenere il segno giusto come calcolato nella si dovrebbe applicare la regola della mano *sinistra*, invece che della mano destra. Il mondo allo specchio giustamente ci mostra la chiralità delle nostre mani.

Quanto detto fin qui ci è sufficiente per affermare che la trasformazione di parità lascia inalterato lo spin.

Inversione temporale

L'inversione temporale è classicamente definita dalla trasformazione:

$$s = -t$$

Eq. 2-12

Man mano che s aumenta sto guardando nel passato (di t) sempre più lontano rispetto al tempo 0 . Tale trasformazione genera la seguente variazione di posizione e velocità:

$$\begin{aligned} Q &= q \\ P &= -p \end{aligned}$$

Eq. 2-13

Se adesso ricostruisco sulla nuova linea del tempo il sistema originario è facile accorgersi che la forma dell'Hamiltoniana presentata garantisce l'invarianza ($H'=H$).

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dQ}{ds} &= \frac{dq}{d(-t)} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p} = \frac{\partial H(Q,P)}{\partial P} = \frac{P}{m} \\ \frac{dP}{ds} &= \frac{d(-p)}{d(-t)} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} = -\frac{\partial H(-Q,-P)}{\partial(-Q)} = -\frac{\partial H(Q,-P)}{\partial Q} \end{aligned} \right.$$

Eq. 2-14

Dunque questa trasformazione canonica applicata sull'Hamiltoniana fornita preserva la forma delle equazioni del moto, e garantisce invarianza. Adottando adesso il punto di vista 2 (ossia rimanendo nello stesso sistema di riferimento) possiamo dire che le soluzioni dello stato invertito:

$$\begin{aligned} Q(t) &= q(-t) \\ P(t) &= -p(-t) \end{aligned}$$

Eq. 2-15

ci descrivono il moto filmato all'indietro, che quindi è ancora possibile.

Coniugazione di carica

Nel mondo classico l'operazione di coniugazione di carica corrisponde ad invertire il segno delle cariche. Evidentemente questo non altera gli effetti dell'interazione Coulombiana (in quanto cariche dello stesso segno rimangono tali, essendo entrambe invertite). Anche dalla forma delle equazioni di Maxwell si può ricavare con qualche ragionamento che l'elettromagnetismo è invariante nella sua interezza (dunque la coniugazione è una simmetria), anche in considerazione del fatto che l'attribuzione del segno è puramente convenzionale.

3. Il teorema di Wigner e la fisica del laboratorio

Ricordiamo che secondo i postulati della MQ lo stato di un sistema è rappresentato da un *raggio*, ossia da una classe di equivalenza di vettori che differiscono di una fase globale (che quindi non incide sul calcolo della norma). Il teorema di Wigner nella sua formulazione matematica asserisce allora che:

“Data una trasformazione biunivoca tra *raggi* di uno spazio di Hilbert che conservi la norma, è sempre possibile scegliere le fasi in modo che tale trasformazione sia realizzata sui vettori dello spazio di Hilbert come unitaria o antiunitaria.”

Questa la (necessaria) premessa matematica, che costituisce il fondamento di quanto a seguire. Una dimostrazione del teorema di Wigner, che non replichiamo, viene fornita in [2].

Accenniamo come esempio ad una trasformazione controcorrente, in quanto l'unica antiunitaria tra le C,P,T: l'inversione temporale, costruita a partire dall'idea espressa nell'Eq. 2-12. Ricordiamo che si ha invarianza della fisica, ossia anche il moto all'indietro è un moto fisico, se:

$$U(s)(R\phi_0) = R(U(t)\phi_0)$$

Eq. 3-1

Se in meccanica classica la condizione si traduce in una semplice condizione sull'Hamiltoniana, vediamo che in meccanica quantistica questo implica che l'operatore di inversione temporale sia antilineare. Infatti perché valga questo deve essere, ad esempio per ogni autostato dell'energia:

$$\underbrace{e^{-iEs}(R\varphi_0)}_{e^{iEt}(R\varphi_0)} = R(e^{-iEt}\varphi_0)$$

Eq. 3-2

Da cui segue l'antilinearità, solo grazie alla quale è possibile scrivere:

$$R(e^{-iEt}\varphi_0) = e^{-(-iEt)}(R\varphi_0) = e^{iEt}(R\varphi_0)$$

Eq. 3-3

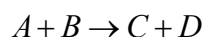
La qual cosa risulta, come detto, in accordo con una delle due possibilità previste dal teorema di Wigner. $U(T)$ è dunque un operatore antiunitario che deve invertire impulsi delle particelle e rimescolare gli stati in modo da rovesciare lo spin:

$$T|r, \mathbf{p}\rangle = \eta_T^* S_{rr'}(T) |r', -\mathbf{p}\rangle$$

Eq. 3-4

In cui la S deve essere invece unitaria per preservare la probabilità totale.

Ritornando ad una panoramica generale, è importante sottolineare che anche nel caso di simmetrie discrete la trasformazione che le realizza a livello teorico agendo sui raggi dello spazio di Hilbert può essere vista come la riproduzione di uno stato fisico reale applicando modifiche allo stato di partenza sulla base dell'approccio 2 alla simmetria, presentato come premessa di questo scritto. Pensiamo ad esempio ad una reazione del tipo:



Eq. 3-5

In cui assumiamo ad esempio che A sia il proiettile e B il bersaglio. Potremmo allora testare:

- ✓ la parità (P) scambiando A (che diventa il nuovo bersaglio) e B (il nuovo proiettile)
- ✓ la coniugazione di carica (C) operando la stessa reazione con le rispettive antiparticelle
- ✓ l'inversione temporale (T) facendo reagire C e D per produrre A e B .

In ciascun caso potremmo paragonare le probabilità di ottenere la reazione finale, parimenti trasformata rispetto all'originale, per concludere quali simmetrie siano effettivamente invarianti per una data interazione. Molto utile, come vedremo, il caso dei decadimenti.

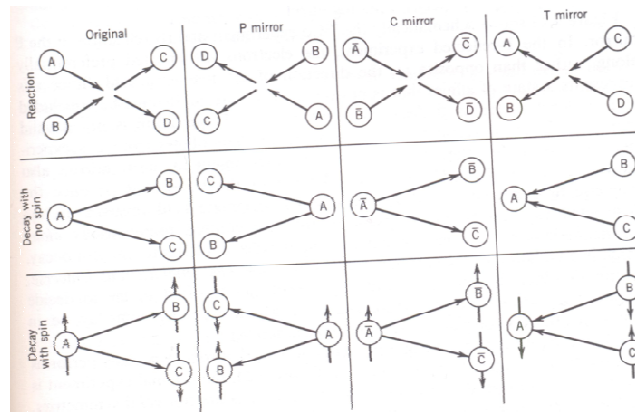


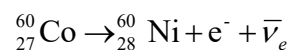
Figura 2. Test di fisica nucleare per P, C e T [4]

4. La parità in MQ

Per prima cosa vediamo perché una trasformazione apparentemente innocua come la parità ha dato tanti grattacapi ai fisici a partire dagli anni '50.

Proprio per quanto detto a proposito della proprietà dello spin di rimanere invariante sotto inversione del riferimento, un esperimento che coinvolga lo spin rappresenta un terreno idoneo per la verifica di un'eventuale violazione della parità da parte di una qualche legge fisica. L'idea base è sfruttare l'invarianza dello spin nel "mondo riflesso" per testare la simmetria (o l'eventuale asimmetria) di un processo, come ad esempio un decadimento.

Ci viene in aiuto allora l'esperimento concluso nel 1956 da Chien-Shiung Wu, anche nota come Madame Wu, che coinvolge il decadimento β del Cobalto 60:



Eq. 4-1

Il Cobalto di partenza, instabile, ha spin totale del nucleo pari a 5 a causa della configurazione ammessa per i fermioni del nucleo stesso. Pertanto è possibile polarizzarlo, ossia allineare gli spin dei nuclei, inserendo il Cobalto in un campo magnetico molto forte. Inoltre l'apparato sperimentale deve essere portato a temperatura bassissima (dell'ordine di 10^{-2} K) perché l'allineamento sia statisticamente quasi totale e non venga distrutto dall'agitazione termica. Per non assorbire gli elettroni emessi è infine necessario utilizzare un foglio molto sottile di materiale, con direzione di polarizzazione ortogonale al foglio stesso; con queste condizioni (foglio sottile, campo magnetico elevato, temperatura bassissima) era possibile studiare la direzione di emissione (ossia: l'impulso) dell'elettrone rispetto allo spin.

Perché la scelta è vincente? Semplicemente perché l'impulso è un vettore polare mentre lo spin è assiale. Chiunque creda in un Universo che non viola la parità penserebbe che non ci deve essere asimmetria tra elettroni emessi nella direzione dello spin e in quella contro spin, perché altrimenti nel mondo "rovesciato" le due distribuzioni si invertirebbero rispetto alla direzione dello spin stesso, quest'ultima rimanendo invece invariata (leggi: nel mondo rovesciato ho riprodotto lo stesso stato di partenza del mondo "reale", ma l'esito dell'esperimento è opposto!).

Quello che succede è che nel nostro mondo si assiste proprio ad una asimmetria avanti-indietro nella direzione dell'elettrone emesso. In pratica se J è lo spin del sistema cobalto e p l'impulso dell'elettrone (chiaramente conducendo il conteggio su un grande numero di decadimenti), quello che si riscontra è che per questo valore di aspettazione:

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{p} \rangle \neq 0$$

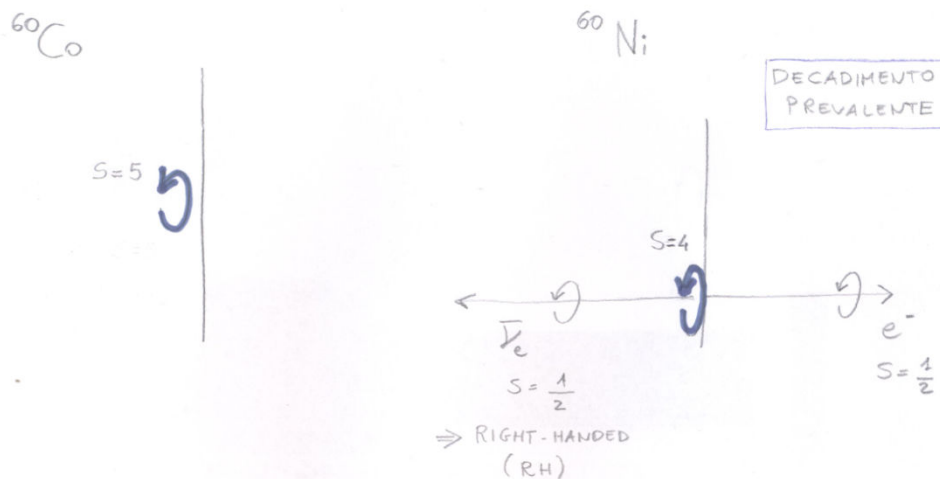
Eq. 4-2

Quale implicazione porta la violazione della parità, ossia la non invarianza per parità nello sviluppo della teoria delle interazioni? Per quanto detto precedentemente si deve avere che per l'interazione che ha determinato questo decadimento (che per altre vie sappiamo essere quella *debole*) si ha:

$$[H_{I,weak}, P] \neq 0$$

Eq. 4-3

Quello che è fondamentale ribadire è che per questo esperimento, che come abbiamo detto coinvolge l'interazione debole, il "mondo dei 3 assi rovesciati" è diverso, quindi *distinguibile*, dal mondo reale. Vediamo allora come questo determina un preciso *constraint* sull'elicità dell'antineutrino, con l'aiuto dello schema della figura successiva:



Osserviamo per prima cosa che, essendo il nucleo di Nichel finale ben più massivo della coppia elettrone-antineutrino, questo può essere considerato come sostanzialmente fermo e per la conservazione dell'impulso iniziale (anch'esso nullo) le due particelle leggere devono avere impulsi opposti. Con il decadimento del Cobalto, inoltre, lo spin originale (5 unità) si distribuisce nel nuovo nucleo di Nichel (4 unità) e nella coppia elettrone-antineutrino, che si spartiscono la restante unità (da buoni fermioni, $1/2+1/2$). A questo punto entra in gioco l'elicità, ossia la proiezione dello spin nella direzione dell'impulso: dallo schema è evidente che nel sistema di riferimento del laboratorio l'elettrone abbia elicità negativa, quindi l'antineutrino deve avere elicità positiva. Diremo quindi che l'antineutrino è destrorso (*right-handed, RH*).

Per inciso osserviamo che questo vale esattamente se il neutrino ha massa nulla (ossia $v_\nu=0$), che rende l'elicità una quantità Lorentz-invariante.

Osserviamo infine che quanto trovato permette la definizione di destra e sinistra in senso assoluto, ossia valido nella condizione in cui, secondo la nostra teoria, questi sia costituito di materia e non di antimateria (non spieghiamo qui). In questa condizione si può *definire* "antiorario" lo spin dell'antineutrino prodotto (si può pensare ad una rotazione vista dalla punta della freccia dell'impulso), e se anche l'alieno ha due mani chiralità il gioco è fatto (più complicato il caso in cui l'alieno non ha mani, ma ci si può arrivare ugualmente).

Implementiamo adesso la parità in teoria di campo. Per quanto visto, l'operatore di parità deve invertire gli impulsi ma lasciare inalterati gli spin.

$$U(P)|\mathbf{p}, r\rangle = \eta_P |-\mathbf{p}, r\rangle$$

Eq. 4-4

Inoltre si individuano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} U(P)|0\rangle &= |0\rangle \\ U^2(P) &= 1 \quad U^+(P) = U^{-1}(P) = U(P) \end{aligned}$$

Eq. 4-5

Segue che la fase è reale e può valere $\eta_P = \pm 1$. Per un qualsiasi operatore di campo a n -componenti:

$$U^+(P)\varphi(t, \vec{x})U(P) = S(P)\varphi(t, -\vec{x})$$

Eq. 4-6

Vediamo che relativamente ai creatori e distruttori di parti a frequenza positiva le regole corrette sono date da:

$$\begin{aligned} U^+(P)b^+(\mathbf{p}, r)U(P) &= \eta_P^* b^+(-\mathbf{p}, r) = \eta_P b^+(-\mathbf{p}, r) \\ U^+(P)b(\mathbf{p}, r)U(P) &= \eta_P b(-\mathbf{p}, r) \end{aligned}$$

Eq. 4-7

Il risultato per la parte a frequenza negativa dipende dallo spin della particella che stiamo valutando.

Spin 0

Con una sola componente si ha ovviamente $S(P)=1$. Affinché la parte a frequenza negativa trasformi allo stesso modo di quella positiva si deve avere:

$$U^+(P)d^+(\mathbf{p}, r)U(P) = \eta_P d^+(-\mathbf{p}, r)$$

Eq. 4-8

Quindi la parità dell'antiparticella è la stessa della particella.

Spin 1/2

Differente il caso di spin semintero. Per rispettare il limite classico di accoppiamento, la corrente si deve trasformare con il potenziale vettore:

$$\underbrace{U^+(P)\bar{\psi}(t, \vec{x})\gamma^\mu\psi(t, \vec{x})U(P)}_A = g_{\mu\nu}\bar{\psi}(t, -\vec{x})\gamma^\mu\psi(t, -\vec{x})$$

Eq. 4-9

Sviluppando l'operatore identità in funzione della parità nei punti intermedi:

$$A = U^+(P)\psi^+(t, \vec{x})U(P)U^+(P)\gamma^0\gamma^\mu U(P)U(P)\psi(t, \vec{x})U(P) = \psi^+(t, -\vec{x})U^+(P)\gamma^0\gamma^\mu U(P)\psi(t, -\vec{x})$$

Eq. 4-10

Dunque si deve avere, ricordando la parte a sinistra dell'uguale dell'Eq. 4-9:

$$U^+(P)\gamma^0\gamma^\mu U(P) = g_{\mu\nu}\gamma^0\gamma^\nu$$

Eq. 4-11

Questa relazione è compatibile con la scelta:

$$U(P) = k\gamma^0 \quad |k|^2 = 1 \quad U(P) = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

Eq. 4-12

Dove la condizione su k deriva dalla richiesta che $U^2(P)=1$ (sceglieremo $k=1$ senza perdere di generalità). Sostituendo nella Eq. 4-11 vediamo che l'operatore commuta con la γ^0 e anticommuta con tutte le γ^μ . Per le frequenze positive e negative si ha dalla Eq. 4-12:

$$\begin{aligned} \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) &= u(-\mathbf{p}, r) \\ \gamma^0 v(\mathbf{p}, r) &= -v(-\mathbf{p}, r) \end{aligned}$$

Eq. 4-13

Questo significa in particolare che le parità intrinseche di particelle e antiparticelle di spin $\frac{1}{2}$ sono sempre opposte, ricordando che la particolare forma bispinoriale per la rappresentazione del campo di Dirac è necessaria proprio perché la parità trasforma una rappresentazione $(1/2,0)$ nell'altra $(0,1/2)$ e viceversa:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &\xrightarrow{P} \mathbf{J} \\ \mathbf{K} &\xrightarrow{P} -\mathbf{K} \end{aligned}$$

Eq. 4-14

Con la particolare scelta di k si ha:

$$\begin{aligned} U^+(P)b^+(\mathbf{p}, r)U(P)|0\rangle &= U(P)b^+(\mathbf{p}, r)|0\rangle = b^+(-\mathbf{p}, r) \\ U^+(P)d^+(\mathbf{p}, r)U(P)|0\rangle &= U(P)d^+(\mathbf{p}, r)|0\rangle = -d^+(-\mathbf{p}, r) \end{aligned}$$

Eq. 4-15

Mostriamo che con questa scelta i generatori del gruppo di Poincaré trasformano in modo corretto. Si vede che ad esempio:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int d\Omega_p \sum_r p^\mu \left[b_r^+(p)b_r(p) + d_r^+(p)d_r(p) \right] \\ P^+ P^\mu P &= g_{\mu\nu} P^\nu \end{aligned}$$

Eq. 4-16

Come si può realizzare una corrente pseudovettoriale (=assiale) leptonica? Ricordiamo la definizione di γ^5 :

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\tau$$

Eq. 4-17

γ^5 gode delle seguenti proprietà:

$$[\gamma^5, \gamma^\mu]_{\pm} = 0 \quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad \gamma^{5+} = \gamma^5$$

Eq. 4-18

Si può mostrare che questa quantità è pseudoscalare nell'algebra delle matrici 4x4 (vedi [3], App. A), partendo dal fatto che per qualsiasi trasformazione di Lorentz propria Λ delle coordinate è possibile costruire una corrispondente matrice $S(\Lambda)$ tale che:

$$\gamma^\nu = \Lambda^\nu_\mu S \gamma^\mu S^{-1} \quad S^{-1} = \gamma^0 S^+ \gamma^0 \quad \psi'(x') = S \psi(x) \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}$$

Eq. 4-19

Da cui segue:

$$S^{-1} \gamma^5 S = \gamma^5 \det \Lambda \Rightarrow \bar{\psi}(x) \gamma^5 \psi(x) \text{ trasforma come uno pseudoscalare}$$

Eq. 4-20

Quando accennato è sufficiente ad affermare ad esempio che una corrente così definita:

$$J_A^\mu(x) = \sum_l \bar{\psi}_l(x) \gamma^\mu \gamma^5 \psi_{\nu_l}$$

Eq. 4-21

non cambia segno sotto trasformazioni di parità. Ovviamente questo risultato va inserito nel corpo di una teoria robusta, come quella elettrodebole costruita con questa ricetta:

- ✓ L'accoppiamento tra leptone e partner neutrinico emerge in una teoria di gauge Yang Mills, in cui le due particelle costituiscono un doppietto con simmetria di isospin $SU(2)$;
- ✓ Per giustificare la presenza del solo neutrino left-handed (e dell'antineutrino right-handed dell'esperimento di Madame Wu) il doppietto è sinistro, quindi entra in gioco il proiettore:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$$

Eq. 4-22

Con questi accorgimenti vediamo che la Eq. 4-21 rappresenta una parte del termine di accoppiamento con i bosoni di gauge W. Non andiamo oltre.

Vediamo piuttosto il set di trasformazioni delle seguenti quantità, dette bilineari di Dirac per ovvi motivi:

$P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \psi(t, \mathbf{x}) P = \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \psi(t, -\mathbf{x})$	scalare pseudoscalare vettore pseudovettore tensore antisimmetrico
$P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma^5 \psi(t, \mathbf{x}) P = -\bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^5 \psi(t, -\mathbf{x})$	
$P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma^\mu \psi(t, \mathbf{x}) P = g^{\mu\mu} \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^\mu \psi(t, -\mathbf{x})$	
$P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, \mathbf{x}) P = -g^{\mu\mu} \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, -\mathbf{x})$	
$P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \underbrace{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}_{\propto \sigma^{\mu\nu}} \psi(t, \mathbf{x}) P \sigma^{\mu\nu} = g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi(t, -\mathbf{x})$	

Eq. 4-23

Spin 1

In questo caso richiediamo che la componente 0 si trasformi come uno scalare e le componenti spaziali come un vettore polare, ossia perché valga questa trasformazione:

$$U^+(P)W_\mu(x)U(P) = \eta_P g^{\mu\nu} W_\nu(x^0, -\mathbf{x})$$

Eq. 4-24

Referenze

- [1] L. Maiani, "Interazioni elettrodeboli", Editori Riuniti, 2013
- [2] A. Di Giacomo, "Fisica Teorica", Ed. ETS 1992
- [3] F. Mandl, G. Shaw, "Quantum field theory", Wiley & Sons, 1984, Chap. 12 App. 12.6.2
- [4] K. Krane, "Introductory nuclear physics", Wiley & Sons, 1988