Analisi funzionale e teoria di campo. Parte 1

Luca Alfinito, dicembre 2020

1. Funzionale e derivata funzionale

Si definisce un *funzionale* una corrispondenza *F* che associa ad ogni funzione *f* un numero (reale o complesso). Se *A* è lo spazio delle funzioni:

$$F : A \ni f \to F[f] \in R \quad (\text{o } C)$$

Eq. 1-1

Diremo quindi che un funzionale è una mappatura tra i punti dello spazio delle funzioni e i numeri reali (o complessi).

Siamo adesso interessati a definire la derivata funzionale, ossia il tasso di variazione di *F[f]* in funzione di una piccola variazione della funzione *f*. Ovviamente ci proponiamo meglio di individuare il significato di variazione piccola della funzione, che può essere espressa mediante una funzione λ e un parametro ε piccolo a piacere:

$$f^*(x) = f(x) + \varepsilon\lambda(x)$$

Eq. 1-2

In cui con *x* si indica l'insieme degli argomenti della funzione di partenza. La derivata funzionale nella direzione di λ sarà allora definita come:

$$\frac{\delta_\lambda F}{\delta_\lambda f} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(f^*) - F(f)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(f + \varepsilon\lambda) - F(f)}{\varepsilon}$$

Eq. 1-3

Nella fattispecie, nel caso più semplice possiamo assumere che *f** differisca da f solo in un punto *x* e per una quantità infinitesima. Questo si può implementare utilizzando una delta di Dirac e scriveremo allora:

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(f(z) + \varepsilon\delta(z - x)) - F(f)}{\varepsilon}$$

Eq. 1-4

Un caso semplice di funzionale è quello che associa ad ogni funzione il suo valore in corrispondenza di uno specifico punto:

$$P : A \ni f \to P[f] = f(y) \in R \quad (\text{o } C)$$

Eq. 1-5

Tale funzionale si può scrivere come:

$$P[f] = \int f(s)\delta(s - y)ds$$

Eq. 1-6

Valutiamo allora la derivata funzionale per questo caso speciale:

$$\frac{\delta P[f]}{\delta f(x)}=\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int (f(s)+\varepsilon\delta(s-x))\delta(s-y)ds-\int f(s)\delta(s-y)ds}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int \varepsilon\delta(s-x)\delta(s-y)ds}{\varepsilon}=\delta(y-x)$$

Eq. 1-7

Possiamo dunque concludere che:

$$P[f]=f(y)\quad\Rightarrow\quad\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)}=\delta(y-x)$$

Eq. 1-8

Lavorando con la derivazione nella generica direzione individuata dalla funzione λ si ottiene invece:

$$\frac{\delta_\lambda P[f]}{\delta_\lambda f(x)}=\frac{\delta_\lambda f(y)}{\delta_\lambda f(x)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int (f(s)+\varepsilon\delta(s-x)\lambda(s))\delta(s-y)ds-\int f(s)\delta(s-y)ds}{\varepsilon}=\lambda(y)\delta(y-x)$$

Eq. 1-9

Consideriamo adesso il caso:

$$F[J]=\int d^4xJ(x)\varphi(x)$$

Eq. 1-10

Si ha allora:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}F[J]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int d^4y[J(y)+\varepsilon\delta(y-x)]\varphi(y)-\int d^4yJ(y)\varphi(y)}{\varepsilon}=\varphi(x)$$

Eq. 1-11

Caso maggiormente di interesse è:

$$F[J]=e^{\int d^4xJ(x)\varphi(x)}$$

Eq. 1-12

Per il quale si ha:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}F[J]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\int d^4y\{J(y)\varphi(y)+\varepsilon\delta(y-x)\varphi(y)\}}-e^{\int d^4y\{J(y)\varphi(y)\}}}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}e^{\int d^4y\{J(y)\varphi(y)\}}\frac{e^{\int d^4y\{\varepsilon\delta(y-x)\varphi(y)\}}-1}{\varepsilon}=$$
$$\approx\lim_{\varepsilon\to 0}e^{\int d^4y\{J(y)\varphi(y)\}}\frac{1+\varepsilon\int d^4y\{\delta(y-x)\varphi(y)\}-1}{\varepsilon}=e^{\int d^4y\{J(y)\varphi(y)\}}\varphi(x)$$

Eq. 1-13

Evidentemente il funzionale introdotto in questo esempio è la soluzione dell'equazione differenziale funzionale:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}F[J]=\varphi(x)F[J]$$

Eq. 1-14

2. Il funzionale generatore

Sfruttando lo strumento matematico introdotto possiamo allora definire il funzionale generatore, nel caso semplice di un unico campo:

$$Z[J]=\int d[\varphi]e^{i\left\{S[\varphi]-\int d^4xJ(x)\varphi(x)\right\}}$$

Eq. 2-1

In virtù di questa scelta è facile ottenere questi due risultati:

$$Z[0]=\int d[\varphi]e^{iS[\varphi]}$$

Eq. 2-2

$$\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\cdots\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right)Z[J]\Big|_{J=0}=\int d[\varphi]\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)e^{iS[\varphi]}$$

Eq. 2-3

Vediamo l'implicazione di utilizzare per *S* proprio l'azione del campo. Ricordando che vale:

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|0\rangle=\frac{\int d[\varphi]\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)e^{iS[\varphi]}}{\int d[\varphi]e^{iS[\varphi]}}$$

Eq. 2-4

Si ha allora:

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|0\rangle=\frac{1}{Z[0]}\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\cdots\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right)Z[J]\right]_{J=0}$$

Eq. 2-5

La naturale estensione del funzionale generatore per *N* campi è:

$$Z[J_1,\dots,J_N]=\int d[\varphi]e^{i\left\{S[\varphi]-\int d^4x\sum_k J_k(x)\varphi_k(x)\right\}}$$

Eq. 2-6

Mentre ad esempio nel caso di unico campo complesso:

$$Z[J,J^+]=\int d[\varphi]e^{i\left\{S[\varphi,\varphi^+]-\int d^4x\left(J_k(x)\varphi^+{}_k(x)+J^+{}_k(x)\varphi_k(x)\right)\right\}}$$

Eq. 2-7

3. Esempio: la teoria scalare

Applichiamo l'idea sviluppata fin qui ad un campo scalare reale, per il quale il funzionale d'azione si può esprimere come:

$$S[\varphi] = \frac{1}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right)$$

Eq. 3-1

Per quanto detto il funzionale generatore sarà:

$$Z[J] = \int d[\varphi] e^{i\left\{\frac{1}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi\right) - \int d^4x J(x)\varphi(x)\right\}}$$

Eq. 3-2

Occorre manipolare l'integrando dell'esponenziale sfruttando le proprietà di annullamento all'infinito e la formula di integrazione per parti:

$$\int d^4x\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi\right) = \varphi\partial^\mu\varphi\Big|_\infty - \int d^4x\left(\varphi\partial_\mu\partial^\mu\varphi\right)$$

Eq. 3-3

Dunque possiamo ricondurci ad una forma quadratica:

$$S[\varphi] = -\frac{1}{2}\int d^4x\left(\varphi\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi\right) = -\frac{1}{2}\int d^4x d^4y\left[\varphi(x)\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\delta(y-x)\varphi(y)\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\int d^4x d^4y\left[\varphi(x)K(y-x)\varphi(y)\right]$$

Eq. 3-4

Dove si è ovviamente posto:

$$K(x-y) = \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\delta(x-y)$$

Eq. 3-5

Svilupperemo ora il calcolo con un procedimento euristico, sebbene si trovino referenze di soluzioni più eleganti. Si tratta di valutare l'integrale esponente, tentando una sorta di ricostruzione come quadrato perfetto:

$$\int d^4x\left(\varphi(x)K(x-y)\varphi(y) + 2J(x)\varphi(x)\right) = \int d^4x\left[\left(\varphi K\varphi + 2\varphi J + K^{-1}J^2\right) - K^{-1}J^2\right]$$

Eq. 3-6

Secondariamente si separa il doppio prodotto

$$\int d^4x\left[\left(\varphi K\varphi + 2\varphi J + K^{-1}J^2\right) - K^{-1}J^2\right] = \int d^4x\left[\left(\varphi K\varphi + \varphi J + J\varphi + K^{-1}J^2\right) - K^{-1}J^2\right]$$

Eq. 3-7

Si inseriscono opportunamente coppie ininfluenti al risultato complessivo:

$$\int d^4x\left[\left(\varphi K\varphi+\varphi J+J\varphi+K^{-1}J^2\right)-K^{-1}J^2\right]=\int d^4x\left[\left(\varphi K\varphi+\varphi\underbrace{KK^{-1}}J+\left(\underbrace{KK^{-1}}J\right)\varphi+K^{-1}J\underbrace{KK^{-1}}J\right)-K^{-1}J\underbrace{KK^{-1}}J\right]$$

Eq. 3-8

Il terzo elemento della somma può essere trasformato utilizzando due volte la regola di integrazione per parti, con opportune ipotesi sull'andamento di *J* all'infinito:

$$\int d^4x\left(\underbrace{KK^{-1}}J\right)\varphi=\int d^4x\left(\underbrace{\left[\left(\partial_\mu\partial^\mu\right)K^{-1}\right]}J+m^2\left(K^{-1}J\right)\right)\varphi=\underbrace{\left[\left(\partial^\mu\right)K^{-1}J\right]\varphi\Big|_\infty}_{=0}+\int d^4x m^2\left(K^{-1}J\right)\varphi-\int d^4x\left[\left(\partial^\mu\right)K^{-1}J\right]\partial_\mu\varphi=$$
$$=\int d^4x\left(K^{-1}J\right)m^2\varphi-\underbrace{K^{-1}J\partial_\mu\varphi\Big|_\infty}_{=0}+\int d^4x\left[K^{-1}J\right]\partial_\mu\partial^\mu\varphi=\int d^4x\left[K^{-1}J\right]\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\varphi=\int d^4x\left[K^{-1}J\right]K\varphi$$

Eq. 3-9

Cosicché l'integrale complessivo all'esponente diventa:

$$\int d^4x\left[\left(\varphi K\varphi+\varphi J+J\varphi+K^{-1}J^2\right)-K^{-1}J^2\right]=\int d^4x\left[\left(\varphi K\varphi+\varphi\underbrace{KK^{-1}}J+\left(K^{-1}J\right)\left(K\varphi\right)+K^{-1}J\underbrace{KK^{-1}}J\right)-K^{-1}J\underbrace{KK^{-1}}J\right]=$$
$$=\int d^4x\left[\varphi\left(K\varphi+KK^{-1}J\right)+\left(K^{-1}J\right)\left(K\varphi+KK^{-1}J\right)-K^{-1}JKK^{-1}J\right]=$$
$$=\int d^4x\left[\left(\varphi+K^{-1}J\right)\left(K\varphi+KK^{-1}J\right)-K^{-1}JKK^{-1}J\right]=\int d^4x\left[\left(\varphi+K^{-1}J\right)K\left(\varphi+K^{-1}J\right)-K^{-1}JKK^{-1}J\right]$$

Eq. 3-10

Ritornando al funzionale generatore con l'esponente così calcolato, si può estrarre fuori dall'integrale funzionale un coefficiente non dipendente dai vari cammini:

$$Z[J]=\int d[\varphi]e^{-\frac{i}{2}\left\{\int d^4x\left[\left(\varphi+K^{-1}J\right)K\left(\varphi+K^{-1}J\right)-K^{-1}JKK^{-1}J\right]\right\}}=e^{+\frac{i}{2}\int d^4x\left(K^{-1}JKK^{-1}J\right)}\int d[\varphi]e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\left[\left(\varphi+K^{-1}J\right)K\left(\varphi+K^{-1}J\right)\right]}$$

Eq. 3-11

Vediamo inoltre che l'integrale sulle possibili configurazioni del campo è indipendente da *J* e contribuisce al risultato con una costante, come risulta evidente operando la sostituzione:

$$\varphi\to\varphi'=\varphi+K^{-1}J$$

Eq. 3-12

Tale costante può essere omessa visto che nel calcolo del propagatore la *Z* compare anche al denominatore nella forma *Z(J=0)*, per il quale viene dunque riproposta la medesima forma dell'integrale funzionale.

In definitiva ciò che contribuisce è:

$$Z[J]=e^{+\frac{i}{2}\int d^4x\left(K^{-1}JKK^{-1}J\right)}$$

Eq. 3-13

Operando una doppia integrazione per parti (una per derivata), come per l'Eq. 3-9:

$$\int d^4x\left(K^{-1}JKK^{-1}J\right)=\int d^4x\left(JK^{-1}J\right)$$

Eq. 3-14

In definitiva:

$$Z[J]=e^{+\frac{i}{2}\int d^4x\left(JK^{-1}J\right)}$$

Eq. 3-15

L'operatore K^{-1}, inverso dell'operatore differenziale K è ovviamente un operatore integrale. Anticipando il risultato utilizziamo una nomenclatura familiare (il segno meno è introdotto per riprodurre l'usuale convenzione sul segno della funzione Δ_F):

$$\left[K^{-1}J\right](x)=-\int d^4y\Delta_F(x-y)J(y)$$

Eq. 3-16

Per sua definizione vale ovviamente:

$$K\left[K^{-1}J\right](x)=J(x)$$

Eq. 3-17

Pertanto:

$$K\Delta_F(z)=-\delta^4(z)$$

Eq. 3-18

Nel risolvere l'equazione precedente dobbiamo fare un passo indietro e osservare che nella manipolazione degli integrali ci si imbatte spesso in quantità di modulo unitario come *exp[iS]*, per cui deve essere dato un criterio di operatività per evitare di trattare divergenze. A tal proposito conviene operare un cambio di variabile:

$$t=(1-i\chi)\tau$$

Eq. 3-19

In tal modo viene assegnata al tempo piccola parte complessa (negativa) su cui si effettuerà successivamente il limite. In termini di differenziali:

$$\begin{aligned}
&dt=(1-i\chi)d\tau\\
&\frac{d}{dt}=\frac{d}{(1-i\chi)d\tau}\approx(1+i\chi)\frac{d}{d\tau}\\
&\frac{d^2}{dt^2}=\frac{d^2}{(1-i\chi)^2d\tau^2}\approx(1+2i\chi)\frac{d^2}{d\tau^2}
\end{aligned}$$

Eq. 3-20

Nella derivata seconda è stato trascurato il termine di ordine superiore al primo in χ. Applicando all'operatore K si ottiene:

$$K=(1+2i\chi)\partial_\tau^2-\nabla^2+m^2$$

Eq. 3-21

Operando la trasformata di Fourier all'Eq. 3-18 per passare al dominio del quadrimpulso si ottiene in modo rapido:

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Eq. 3-22

Considerando ad esempio la funzione di Green a due punti abbiamo quindi ottenuto il seguente risultato (vedi Eq. 3-4):

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle = \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)} = i\Delta_F(x-y)$$

Eq. 3-23

Per questo motivo la funzione Δ_F è appunto nota come propagatore di campo a due punti. Ricordiamo che tutto ciò è reso possibile dall'identità fondamentale Eq. 2-5:

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\cdots\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right)Z[J]\right]_{J=0} = \frac{\int d[\varphi]\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)e^{iS[\varphi]}}{\int d[\varphi]e^{iS[\varphi]}}$$

Eq. 3-24

Si può ridefinire la misura di integrazione riassorbendo il denominatore. Inoltre l'espressione precedente può essere generalizzata ad un numero arbitrario di campi φ^i come:

$$\langle 0|T\left\{\prod_{k=1}^{n}\varphi^{i_k}(x_i)\right\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(i\frac{\delta}{\delta J^k(x_n)}\right)Z[J]\right]_{J=0} = \int[d\varphi^i]\prod_{k=1}^{n}\varphi^{i_k}(x_i)e^{iS[\varphi]}$$

Eq. 3-25