Analisi funzionale e teoria di campo. Parte 2

Luca Alfinito, gennaio 2020

1. Introduzione

Proseguiamo in questa seconda parte l'esplorazione della teoria di campo attraverso l'approccio dell'analisi funzionale e del *path integral*. La chiave della comprensione del salto concettuale tra prima e seconda quantizzazione in questo paradigma si fonda su questa analogia: se in un sistema di prima quantizzazione la posizione e l'impulso sono elevati al ruolo di operatori e nella rappresentazione di somma sui cammini integriamo su tutti i percorsi possibili (*x(t),p(t)*) nello spazio delle fasi, nella seconda quantizzazione assurgono al ruolo di operatori il campo e il rispettivo momento, per cui operare un'integrazione sui cammini significa sommare su tutte le configurazioni (φ*(x)* e *π(x)*) in uno spazio delle fasi funzionali. Affronteremo quindi la trattazione partendo da un campo scalare senza interazioni.

2. Teoria di campo scalare libero

Approfondiremo il motivo per cui è utile introdurre i funzionali partendo da una teoria scalare non interagente. Sia dato dunque un campo φ, definito in tutto lo spazio e per qualsiasi istante. Diremo allora calcolare l'ampiezza di probabilità che a un certo istante *t* il campo assuma una data configurazione $\varphi(\vec{x})$ può essere riconducibile ad individuare il giusto funzionale ψ t.c.:

$$\Psi : A' \ni \varphi(\vec{x}) \to \Psi[\varphi(\vec{x}),t] = \langle \varphi | \Psi(t) \rangle \in R$$

Eq. 2-1

In cui *A′* è lo spazio delle configurazioni φ (ossia: ogni elemento di *A′* rappresenta una data funzione delle coordinate). Se consideriamo l'evoluzione nella rappresentazione di Schroedinger, ci stiamo in questo caso interessando alla trasformazione nel tempo del funzionale ψ:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

Eq. 2-2

Ricordiamo che ψ è un funzionale in quanto mappa le configurazioni del campo in numeri. La soluzione dell'equazione è:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi(t_0)\rangle$$

Eq. 2-3

Possiamo allora considerare come insieme delle φ una base (esempio onde piane)

$$\Psi[\varphi(\vec{x}),t] = \langle \varphi | \Psi(t) \rangle = \langle \varphi | e^{-iH(t-t_0)} | \Psi(t_0) \rangle$$

Eq. 2-4

E sfruttando la proprietà di completezza:

$$\Psi[\varphi(\vec{x}),t]=\langle\varphi|\Psi(t)\rangle=\int D\varphi_0\langle\varphi|e^{-iH(t-t_0)}|\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|\Psi(t_0)\rangle=\int D\varphi_0\langle\varphi|e^{-iH(t-t_0)}|\varphi_0\rangle\Psi[\varphi_0(\vec{x}),t_0]$$

Eq. 2-5

Ossia l'integrale è esteso a tutti gli elementi che individuano la base scelta su *A'*. Diremo allora che:

$$\langle\varphi|e^{-iH(t-t_0)}|\varphi_0\rangle=G[\varphi,\varphi_0,t,t_0]$$

Eq. 2-6

è il funzionale che indica l'ampiezza di probabilità di un sistema che si trova alla configurazione φ_0 al tempo t_0 di evolvere in φ al tempo t. In modo simile a quanto fattibile in prima quantizzazione, l'elemento di matrice del funzionale può essere pensato come la somma su tutti i percorsi che collegano φ a partire da φ_0 dopo un intervallo t-t_0.

Possiamo allora suddividere il dato intervallo in tante parti uguali e sfruttare ancora la relazione di completezza:

$$\langle\varphi|e^{-iH(t-t_0)}|\varphi_0\rangle=G[\varphi,\varphi_0,t,t_0]=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=1}^{N}D\varphi_i\langle\varphi|e^{-iH(t-t_N)}|\varphi_N\rangle\langle\varphi_N|\ldots|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|e^{-iH(t_1-t_0)}|\varphi_0\rangle$$

Eq. 2-7

All'aumentare di *N* ovviamente i singoli intervalli temporali diventano sempre più piccoli, per cui per ogni elemento in braket:

$$\langle\varphi_{i+1}|e^{-iH(t_{i+1}-t_i)}|\varphi_i\rangle\approx\langle\varphi_{i+1}|1-iH(t_{i+1}-t_i)|\varphi_i\rangle=\delta[\varphi_{i+1}-\varphi_i]-i(t_{i+1}-t_i)\langle\varphi_{i+1}|H|\varphi_i\rangle$$

Eq. 2-8

In cui abbiamo introdotto il funzionale δ, che può essere visto come un prodotto infinito di funzioni δ (una per ciascun punto dello spazio).

$$\delta[\varphi_{i+1}-\varphi_i]=\prod_{\vec{x}}\delta\big(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})\big)$$

Eq. 2-9

Animati dall'analogia ad una particella, operiamo una trasformata di Fourier della singola funzione, del tipo:

$$\delta\big(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})\big)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\pi_i(\vec{x})}{2\pi}e^{i(\pi_i(\vec{x})(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})))}$$

Eq. 2-10

Cosicché la produttoria dell'Eq. 2-9 può essere riassorbita nell'esponenziale come somma (o meglio, integrale considerando i punti nel continuo spaziale) e quindi scritta come:

$$\delta[\varphi_{i+1}-\varphi_i]=\prod_{\vec{x}}\delta\big(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})\big)=\prod_{\vec{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\pi_i}{2\pi}e^{i(\pi_i(\vec{x})(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})))}=$$
$$=\int D\pi_i e^{i\int d^3x(\pi_i(\vec{x})(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})))}$$

Eq. 2-11

In cui nell'ultima espressione è indicato che π_i copre tutti i cammini, per poter calcolare l'equivalente integrale precedente.

Venendo al secondo termine dell'Eq. 2-8, si introduce per prima cosa un operatore simmetrico, in modo che "attinga" ad entrambi i lati del braket:

$$\varphi' = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}$$

Eq. 2-12

Secondariamente, dobbiamo ricordare la rappresentazione funzionale del momento:

$$\pi(\vec{x}) = -i\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}$$

Eq. 2-13

Volendo calcolare un autofunzionale del momento:

$$-i\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\Psi[\varphi(\vec{y}),t] = \pi(\vec{x})\Psi[\varphi(\vec{y}),t]$$

Eq. 2-14

Si ricava che la soluzione è:

$$\Psi[\varphi(\vec{x}),t] = e^{i\int d^3x\pi(\vec{x})\varphi(\vec{x})}$$

Eq. 2-15

L'elemento di matrice si può scrivere:

$$\langle\varphi_{i+1}|H|\varphi_i\rangle = \int D\pi_i H[\pi_i,\varphi']e^{i\int d^3x(\pi_i(\vec{x})(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})))}$$

Eq. 2-16

Riassemblando i due termini Eq. 2-11 e Eq. 2-16:

$$G[\varphi_{i+1},\varphi_i,t_{i+1},t_i] = \int D\pi_i e^{i\int d^3x(\pi_i(\vec{x})(\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})))}(1-i\varepsilon H[\pi_i,\varphi'])$$

Eq. 2-17

In cui la $\varepsilon = t_{i+1} - t_i$ è una quantità infinitesima, che consente di operare l'approssimazione:

$$1-i\varepsilon H[\pi_i,\varphi'] \approx e^{-i\varepsilon H}$$

Eq. 2-18

Si ha quindi, raccogliendo la ε (costante) fuori dall'integrale:

$$G[\varphi_{i+1},\varphi_i,t_{i+1},t_i] = \int D\pi_i e^{i\varepsilon\int d^3x\left(\pi_i(\vec{x})\left(\frac{\varphi_{i+1}(\vec{x})-\varphi_i(\vec{x})}{\varepsilon}\right)-H\right)}$$

Eq. 2-19

Che significa, recuperando l'intervallo di tempo finito:

$$G[\varphi,t,\varphi_0,t_0]=\int D\varphi D\pi_i e^{i\int_{t_0}^{t}dt\int d^3x\left(\pi_i(\vec{x})\dot{\varphi}_i(\vec{x})-H\right)}$$

Eq. 2-20

In cui riconosciamo all'esponente l'integrale sulla densità Lagrangiana.
Si è quindi arrivati al fondamentale risultato, definito a meno della misura di integrazione:

$$G[\varphi,t,\varphi_0,t_0]=\int D\varphi e^{i\varepsilon\int_{t_0}^{t}dt\int d^3x\mathscr{L}[\varphi,\dot{\varphi},t]}=G[\varphi,t,\varphi_0,t_0]=\int D\varphi\, e^{\int d^4xS[\varphi]}$$

Eq. 2-21

Dove l'integrale è esteso a tutti i cammini che congiungono le due configurazioni rispettivamente iniziale e finale del campo.

3. Teoria di campo scalare interagente

In questo caso l'idea solita è quella di distinguere il contributo all'azione della Lagrangiana libera, indicata con il pedice "0", dalla parte di interazione. Considerando ad esempio una teoria φ^4:

$$Z[J]=\int d[\varphi]e^{i\left\{S_0[\varphi]-\int d^4x\left(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+J(x)\varphi(x)\right)\right\}}=\int d[\varphi]e^{i\left\{S_0[\varphi]-\int d^4xJ(x)\varphi(x)\right\}}e^{-i\int d^4x\frac{\lambda}{4!}\varphi^4}$$

Eq. 3-1

Che ci permette di sviluppare l'esponenziale di interazione in serie:

$$Z[J]=\sum_n\frac{(-i\lambda/4!)}{n!}\int d[\varphi]\left(\int d^4x\varphi^4(x)\right)^n e^{i\left\{S_0[\varphi]-\int d^4xJ(x)\varphi(x)\right\}}$$

Eq. 3-2

A questo punto si opera la sostituzione, argomentata nel corso della parte 1:

$$\left(\int d^4x\varphi^4(x)\right)^n\to\left(\int d^4x\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4J(x)}\right)\right)^n$$

Eq. 3-3

Tali derivate funzionali possono essere portate al di fuori dell'integrale dei cammini:

$$Z[J]=\sum_n\frac{(-i\lambda/4!)}{n!}\left(\int d^4x\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4J(x)}\right)\right)^n\int d[\varphi]e^{i\left\{S_0[\varphi]-\int d^4xJ(x)\varphi(x)\right\}}$$

Eq. 3-4

Riconosciamo nella parte che resta dell'integrale sui cammini il funzionale generatore della teoria imperturbata, Z_0.

$$Z[J]=\sum_n\frac{(-i\lambda/4!)}{n!}\left(\int d^4x\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4J(x)}\right)\right)^n Z_0[J]$$

Eq. 3-5

Recuperando quindi il risultato della parte 1:

$$Z_0[J] = \int d[\varphi] e^{i\left\{S_0[\varphi] - \int d^4x J(x)\varphi(x)\right\}} = e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

Eq. 3-6

Si ha pertanto:

$$Z[J] = \sum_n \frac{(-i\lambda/4!)}{n!}\left(\int d^4x \left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(x)}\right)\right)^n e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}$$

Eq. 3-7

L'Eq. 3-7 mostra in modo chiaro il significato e il suo collegamento con la teoria perturbativa della rappresentazione con gli operatori, ricordando che:

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\cdots\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right)Z[J]\right]_{J=0}$$

Eq. 3-8

Se ad esempio prendiamo la funzione a due punti:

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)Z[J]\right]_{J=0} =$$
$$= \frac{1}{Z[0]}\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)\sum_n \frac{(-i\lambda/4!)}{n!}\left(\int d^4z \left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(z)}\right)\right)^n e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]_{J=0}$$

Eq. 3-9

In funzione del parametro λ è possibile arrestarsi a un certo ordine dello sviluppo. Ad esempio l'ordine 0:

$$G^{(0)}(x_1,x_2) = \left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]_{J=0} = i\Delta_F(x_1-x_2)$$

Eq. 3-10

Il contributo all'ordine 1 invece è:

$$G^{(1)}(x_1,x_2) = \frac{1}{Z[0]}\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)Z[J]\right]_{J=0} =$$
$$= \frac{1}{Z[0]}\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right)(-i\lambda)\left(\int d^4z \left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(z)}\right)\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)}\right]_{J=0}$$

Eq. 3-11

Per meglio comprendere l’azione della derivata funzionale vediamo che:

$$\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(z)}\right)Z_0[J]=\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(z)}\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}=\int d^4y'\Delta_F(z-y')J(y')e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}=$$
$$=\int d^4y'\Delta_F(z-y')J(y')Z_0[J]$$

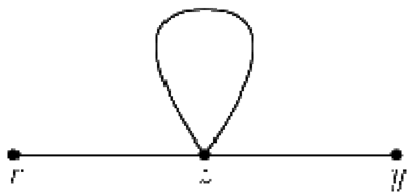
Eq. 3-12

Mentre l’applicazione di una seconda derivata funzionale:

$$\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(z')}\right)\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(z)}\right)Z_0[J]=\left(i\frac{\delta^4}{\delta^4 J(z)}\right)e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}=\int d^4y'\Delta_F(z-y')J(y')e^{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)}=$$
$$=\left(\int d^4y''\Delta_F(z'-y'')J(y'')\right)\left(\int d^4y'\Delta_F(z-y')J(y')\right)Z_0[J]+\Delta_F(z-z')Z_0[J]$$

Eq. 3-13

Tornando al calcolo della funzione di Green, vediamo allora che il primo ordine per la teoria φ^4 origina un diagramma del tipo:



$$G^{(1)}(x_1,x_2)=-\lambda\frac{1}{2}\int d^4u\Delta_F(u-u)\Delta_F(x_1-u)\Delta_F(x_2-u)$$

Eq. 3-14