Cosmologia

1. Introduzione

Approcciandoci allo studio dell'Universo l'unica cosa che possiamo fare è puntare i nostri strumenti alle varie parti del Cielo, sia a quelle visibili (stelle, galassie, ammassi ecc.) che a quelle invisibili (radiazione di fondo, materia ed energia oscura, radio-galassie, flusso di raggi X e quant'altro). Quanto si osserva oggi è che su grande scala, diciamo oltre 100 Mpc (ordine di grandezza: 10^{21} km) l'Universo si presenta oggi isotropo: dal punto di vista del pianeta Terra la densità di galassie appare indipendente dalla direzione indagata [1].

Questo in particolare implica che possiamo pensare la densità di galassie funzione solo della distanza, e indipendente da variabili angolari: ma ciò porta anche a concludere che l'Universo è anche omogeneo, perché o pensiamo che la Terra sia posta nell'unico centro di simmetria cosmico oppure che su grande scala la densità di galassie sia costante, il che ci porrebbe fuori dall'imbarazzo di riproporre una visione Tolemaica della cosmologia.

In linea con la tradizione copernicana abbracceremo quindi il *principio cosmologico* secondo cui tutte le posizioni dell'Universo sono essenzialmente equivalenti eccetto che per irregolarità locali.

2. La metrica Robertson-Walker

Il principio cosmologico proposto costituisce il presupposto per costruire una o più geometrie fedeli alla proprietà che abbiamo enunciato. Cominciamo per esercizio studiando una varietà, pur in meno dimensioni, che realizza le condizioni di omogeneità ed isotropia, considerando la "2-sfera" S^2: uno spazio bidimensionale senza confini o bordi ma di fatto limitato, perché può essere circumnavigato tornando al punto di partenza. Lo spazio bidimensionale della 2-sfera coincide evidentemente con la superficie di una sfera tridimensionale. Il modo migliore di visualizzarla matematicamente è infatti quello di introdurre una dimensione spaziale "extra", fittizia, ed incorporare la 2-sfera in uno spazio Euclideo con coordinate x_1, x_2, x_3. L'equazione di una 2-sfera di raggio a sarà quindi:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$$

Eq. 2-1

Che differenziata dà il vincolo sugli spostamenti infinitesimi:

$$2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 2x_3 dx_3 = 0$$

Eq. 2-2

Si può dunque esprimere il terzo in funzione dei primi due:

$$dx_3 = \frac{-x_1 dx_1 - x_2 dx_2}{x_3}$$

Eq. 2-3

Con questa dipendenza si può calcolare lo spostamento infinitesimo sulla 2-sfera, che infatti dipende solo da due gradi di libertà:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \left(\frac{-x_1 dx_1 - x_2 dx_2}{x_3} \right)^2 \approx dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{x_1^2 dx_1^2 + x_2^2 dx_2^2}{x_3^2} = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{x_1^2 dx_1^2 + x_2^2 dx_2^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Eq. 2-4

Consideriamo adesso due coordinate particolari, definite dalla trasformazione:

$$\begin{aligned} x_1 &= r' \cos \vartheta \\ x_2 &= r' \sin \vartheta \end{aligned}$$

Eq. 2-5

Queste coordinate corrispondono a coordinate polari nel piano definito da:

$$x_3 = \sqrt{a^2 - r'^2}$$

Eq. 2-6

Risulta quindi:

$$dx_1 = dr'\cos\vartheta - r'\sin\vartheta d\vartheta$$
$$dx_2 = dr'\sin\vartheta + r'\cos\vartheta d\vartheta$$

Eq. 2-7

Sviluppando i calcoli:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{x_1^2 dx_1^2 + x_2^2 dx_2^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2} = \frac{a^2}{a^2 - r'^2} dr'^2 + r'^2 d\vartheta^2$$

Eq. 2-8

Se si introduce la coordinata adimensionale:

$$r = \frac{r'}{a}$$

Eq. 2-9

Si arriva alla formula:

$$dl^2 = a^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\vartheta^2 \right\}$$

Eq. 2-10

In questo caso *r=1* indica l'equatore della 2-sfera, mentre i poli sono individuati da *r=0*. Essendo questa figura omogenea e isotropa tutti i punti sono equivalenti e non esiste una direzione privilegiata e in qualche modo riflette il fatto (ipotizzato) che non esista una posizione preferita in un Universo omogeneo (pur in due dimensioni). L'incremento – o il decremento - del raggio della 2-sfera *a* determina un'espansione - o la contrazione dell'Universo.

La generalizzazione di questo modello bidimensionale al caso di tre dimensioni spaziali è banale. L'idea per la 3-sfera è ancora immaginarla immersa in uno spazio a 4 dimensioni dotato della solita metrica spaziale Euclidea, per rimuovere quindi la quarta coordinata fittizia ed ottenere:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{x_1^2 dx_1^2 + x_2^2 dx_2^2 + x_3^2 dx_3^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

Eq. 2-11

Utilizzando in analogia al caso precedente le seguenti trasformazioni:

$$x_1 = r'\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$x_2 = r'\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$x_3 = r'\cos\vartheta$$

Eq. 2-12

Si arriva dunque con la medesima definizione adimensionale di *r* alla metrica dell'elemento spaziale:

$$dl^2 = a^2\left\{\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2\right\}$$

Eq. 2-13

Partendo invece dall'equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -a^2$$

Eq. 2-14

Si ottiene il caso a curvatura negativa denominato piano iperbolico o H^2:

$$dl^2 = a^2\left\{\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\vartheta^2\right\}$$

Eq. 2-15

Ultimo caso il modello piatto, illimitato con volume infinito, che può essere ricavato come caso limite dei precedenti facendo tendere il raggio *a* all'infinito:

$$dl^2 = a^2\left\{dr^2 + r^2 d\vartheta^2\right\}$$

Eq. 2-16

Questi tre casi trovano generalizzazione nella metrica di Robertson-Walker, in funzione del parametro *k* (1, 0 o -1):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2\right\}$$

Eq. 2-17

Risulta conveniente a questo punto esprimere la metrica in termini di "tempo conforme":

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

Con questa scelta:

Eq. 2-18

$$ds^2 = a^2(\eta)\left\{d\eta^2 - \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2\right\}$$

Eq. 2-19

Conforme alla metrica di Minkowski moltiplicata per un fattore di scala. È ovvio che la completa determinazione della metrica richiede la conoscenza della funzione *a*: questa può essere calcolata solo risolvendo le equazioni di Einstein una volta assegnate la distribuzione e le proprietà fisiche della materia presente.

Per quanto riguarda le coordinate scelte (compreso il tempo, per la scelta fatta), si tratta di un sistema di coordinate *comovente*: come tacche numerate su un palloncino, il loro valore scritto non cambia anche se il palloncino è in espansione. Ricordiamo infine che, non essendoci alcuna posizione privilegiata in questa configurazione spaziale, la metrica descritta riproduce un Universo omogeneo (non bisogna pensare che tutto si espanda allontanandosi da un "centro repulsore", ad esempio: ogni punto si allontana dagli altri in modo uniforme).

Con questa metrica forniamo le componenti *spaziali* del tensore di Ricci:

$${}^{(3)}R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right]g_{ij}$$

Eq. 2-20

Mentre:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$
$$R = 6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]$$

Eq. 2-21

$${}^{(3)}R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right]g_{ij}$$

Eq. 2-22

Mentre per i coefficienti di connessione affine si ha:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$
$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{\dot{R}}{R} g_{ij}$$
$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{R}}{R} \delta^i_j$$

Eq. 2-23

3. Metrica RW in differenti coordinate

Possono essere utilizzati anche altri sistemi di coordinate, che presentano ciascuno dei vantaggi a seconda del problema. Ponendo ad esempio:

$$r = \Xi(\chi)$$

Eq. 3-1

Avendo introdotto una nuova coordinata χ e lasciando invariate le altre si ha:

$$ds^2 = R^2(\eta)\left\{d\eta^2 - \frac{\Xi'^2(\chi)d\chi^2}{1-k\Xi^2(\chi)} + \Xi^2(\chi)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}$$

Eq. 3-2

Scegliamo in particolare di utilizzare le seguenti trasformazioni, in funzione di *k*:

k	$\Xi(\chi)$
0	χ
1	$\sin\chi$
-1	$\sinh\chi$

Eq. 3-3

Con queste particolari scelte la metrica può essere riscritta:

k	ds^2
0	$R^2(\eta)\left\{d\eta^2 - d\chi^2 + \chi^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}$
1	$R^2(\eta)\left\{d\eta^2 - d\chi^2 + \sin^2(\chi)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}$
-1	$R^2(\eta)\left\{d\eta^2 - d\chi^2 + \sinh^2(\chi)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}$

Eq. 3-4

Notiamo subito che in tutti i casi la coordinata *η* è una coordinata temporale; esiste in oltre simmetria sferica SO(3) per rotazioni *θ* e *φ*. In ogni caso non si tratta di uno spazio Euclideo, perché la lunghezza delle circonferenze χ=costante è:

$$l_{circ} = 2\pi R\Xi(\chi)$$

Eq. 3-5

4. Geodetiche radiali della luce

Per quanto riguarda la propagazione della luce, consideriamo il caso radiale in quanto risulta banale "a vista". Dall'equazione:

$$ds^2 = 0$$

Eq. 4-1

Che possiamo interpretare caratterizzi il tempo proprio (nullo) del fascio luminoso, come abbiamo visto si arriva a:

$$d\eta = \pm d\chi$$

Eq. 4-2

Vale a dire:

$$\eta = \pm\chi + \text{cost.}$$

Eq. 4-3

Vediamo cosa succede per l'emissione di due segnali successivi, scegliendo senza perdere di generalità la propagazione verso la direzione crescente della coordinata spaziale χ. Per il primo segnale, integrando si ha immediatamente:

$$\eta_r^{(1)} - \eta_e^{(1)} = \chi_r - \chi_e$$

Eq. 4-4

Per il secondo, emesso dopo un tempo $d\eta_e$ dal primo:

$$\eta_r^{(2)} - \eta_e^{(2)} = \eta_r^{(1)} + d\eta_r - \eta_e^{(1)} - d\eta_e = \chi_r - \chi_e$$

Eq. 4-5

Dalle equazioni precedenti segue che:

$$d\eta_r - d\eta_e = \eta_e^{(1)} - \eta_r^{(1)} + \chi_r - \chi_e = 0 \quad \Rightarrow \quad d\eta_r = d\eta_e$$

Eq. 4-6

Volendo quindi comparare gli intervalli di tempo proprio percepiti rispettivamente nelle postazioni dell'emittente e del ricevitore si ha:

$$ds_r = R(\eta_r)d\eta_r$$
$$ds_e = R(\eta_e)d\eta_e$$
$$\frac{ds_r}{ds_e} = \frac{R(\eta_r)}{R(\eta_e)}$$

Eq. 4-7

Se R è una funzione crescente di η– come supponiamo – si ha allora un *redshift cosmologico*, in quanto gli intervalli di tempo (come ad esempio tra un picco e un altro di un'onda luminosa) misurati al ricevitore sono più lunghi di quelli misurati alla sorgente. Per la linearità con la lunghezza d'onda si ottiene parimenti, per un segnale ondulatorio ($\lambda = cT$):

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{R(\eta_r)}{R(\eta_e)}$$

Eq. 4-8

Si pone tradizionalmente:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{R(\eta_r)}{R(\eta_e)} - 1 = \frac{R(\eta_r) - R(\eta_e)}{R(\eta_e)}$$

Eq. 4-9

Le equazioni precedenti ci danno anche informazioni di carattere cinematico. Considerando la relazione quantistica tra impulso e lunghezza d'onda di una particella:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Eq. 4-10

Si ricava che per una particella singola che abbia una certa velocità "classica" v nel sistema comovente (ossia: la velocità percepita come moto relativo agli altri corpi, ad esempio le stelle fisse) vale:

$$v \propto R^{-1}$$

Eq. 4-11

In un Universo in espansione la velocità della particella nel sistema comovente è destinata a tendere a zero anche se inizialmente non nulla.

5. La relazione redshift-distanza al primo ordine. Legge di Hubble

Consideriamo il caso in cui χ_r differisce di poco da χ_e (quandi η_r differisce di poco da η_e). Si sviluppa allora:

$$z \cong \frac{\left[R(\eta_e)+\frac{dR(\eta_e)}{d\eta_e}(\eta_r-\eta_e)\right]-R(\eta_e)}{R(\eta_e)} = \frac{1}{R(\eta_e)}\frac{dR(\eta_e)}{d\eta_e}(\eta_r-\eta_e) \overset{\text{geodetica}}{=} \frac{dR(\eta_e)}{R(\eta_e)d\eta_e}(\chi_r-\chi_e) \overset{dt=R(\eta_e)d\eta_e}{=}$$
$$= \frac{dR(t_e)}{dt}(\chi_r-\chi_e)$$

Eq. 5-1

Sapendo poi che la distanza tra due punti vale:

$$\Delta l = \int_{\chi_e}^{\chi_r} R(\chi')d\chi' \cong R(\eta)(\chi_r-\chi_e)$$

Eq. 5-2

Per utilizzare in modo efficace questo concetto di distanza bisogna decidere quale a quale tempo valutare il parametro R. Se si opera questa scelta:

$$\Delta l = \int_{\chi_e}^{\chi_r} R(\chi')d\chi' \cong R(\eta_e)(\chi_r-\chi_e)$$

Eq. 5-3

Si ha in definitiva:

$$z \cong \frac{dR(t_e)}{dt}\frac{\Delta l}{R(t_e)} = \frac{\dot{R}(t_e)}{R(t_e)}\Delta l = H_e \Delta l$$

Eq. 5-4

Ossia il *redshift cosmologico* è proporzionale al primo ordine alla distanza della sorgente (nell'ipotesi che tutto inizialmente fosse sufficientemente "vicino", per le approssimazioni fatte). H prende il nome di *parametro di Hubble* (non è costante, ma tipico del periodo di emissione):

$$H = \frac{\dot{R}(t_e)}{R(t_e)}$$

Eq. 5-5

Nota. Per grandi Δl, dunque ad esempio per valori di $z \gg 1$, la relazione lineare non può bastare per descrivere il fenomeno. Ad esempio già dagli anni '90 sono note sorgenti con $z > 4$, quindi risulta opportuno passare ad una descrizione ad ordini superiori.

6. Sviluppo in serie in funzione dell'epoca presente t_0. Dipendenza da *z* dei principali parametri

Riscriviamo il rapporto tra i fattori di scala, sviluppiamo in serie *R(t)* centrando sull'epoca presente t_0:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{1}{R(t_0)}\left\{R(t_0) + R'(t)\Big|_{t=t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}R''(t)\Big|_{t=t_0}(t-t_0)^2 + o(t-t_0)^3\right\}$$

Eq. 6-1

Fermandoci appunto al II ordine, vogliamo riscrivere la precedente come un'espressione di $H_0(t-t_0)$, ovviamente valida per piccoli valori:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} \approx 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 (t-t_0)^2$$

Eq. 6-2

Dove il segno meno al secondo termine è stato introdotto per convenzione storica. Riguardo a q_0 si verifica che deve essere:

$$q_0 = -\frac{R''(t_0)}{R(t_0)H^2(t_0)} = -\frac{R''(t_0)}{R'^2(t_0)}R(t_0)$$

Eq. 6-3

Sviluppiamo adesso:

$$1+z = \frac{R(t_0)}{R(t)} \approx R(t_0)\left\{\frac{1}{R(t_0)} - \frac{R'(t)}{R^2(t)}\Bigg|_{t=t_0}(t-t_0) - \frac{1}{2}\frac{R''(t)R^2(t) - 2R'^2(t)R(t)}{R^4(t)}\Bigg|_{t=t_0}(t-t_0)^2\right\} =$$
$$= 1 + H(t_0)(t_0 - t) - \left(\frac{q_0^2}{2} - 1\right)H^2(t_0)(t_0-t)^2$$

Eq. 6-4

Quindi in definitiva:

$$z \approx H(t_0)(t_0 - t) - \left(\frac{q_0^2}{2} - 1\right)H^2(t_0)(t_0-t)^2$$

Eq. 6-5

7. Geodetiche della luce, orizzonti e isotropia

Essendo l'Universo così descritto omogeneo ed isotropo ha senso chiedersi quale sia oggi la distanza massima da cui possiamo ricevere segnali. Tale distanza sarà il nostro "orizzonte"; il calcolo dell'orizzonte viene realizzato valutando la geodetica della luce (l'entità più veloce ad oggi conosciuta) che oggi giunge fino a noi. Abbiamo già visto che per un raggio di luce vale:

$$\eta_r - \eta_e = \chi_r - \chi_e$$

Eq. 7-1

Poniamoci pertanto all'origine delle coordinate, e t sia il tempo attuale. La differenza della coordinata tra qui e l'orizzonte sia R_H. Si giunge a:

$$\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \underbrace{\int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}}$$

Eq. 7-2

Poiché la distanza fisica dell'orizzonte dipende dal tempo si ha in definitiva:

$$d_H(t) = \int_0^{r_H} \sqrt{g_{rr}}\,dr = R(t)\int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = R(t)\int_0^t \frac{dt'}{R(t')}$$

Eq. 7-3

Se quest'ultima grandezza è finita, il nostro cono luce del passato è limitato da un orizzonte, che rappresenta il confine tra l'Universo visibile e quello ad oggi ancora non visibile; matematicamente ci si rende conto che è il comportamento di *R(t)* vicino ad un'eventuale singolarità a determinare la finitezza del nostro orizzonte. Abbiamo visto che il problema degli orizzonti deriva dalla domanda: da quali regioni dell'Universo possiamo oggi ricevere segnali? Senza perdere di generalità poniamoci all'origine delle coordinate e consideriamo ancora la propagazione lungo la coordinata radiale della luce che giunge a noi:

$$\eta_r - \eta_e = -\chi_e$$

Eq. 7-4

Se esiste un limite inferiore per η_e, ad esempio pari a 0, allora ne esiste uno superiore per $-\chi_e$, che vale:

$$-\chi_{e,\sup} = \eta_r$$

Eq. 7-5

Il valore $-\chi_e$, positivo, rappresenta la differenza di coordinata "radiale" rispetto all'orizzonte.

Se prendiamo anche η_r piccolo, vediamo che il suo orizzonte è parimenti ristretto, dunque ci aspettiamo che esistano regioni spaziali che nell'Universo primordiali non possono essersi influenzate a vicenda: per questo in tali regioni non c'è dunque motivo di aspettarci proprietà fisiche simili.

Al contrario però viene osservata una grande omogeneità (la radiazione di fondo è pressoché isotropa).

Il problema si pone così: supponiamo che all'epoca attuale noi riceviamo da tutte le direzioni, radiazione emessa primordialmente: prese due direzioni di angolo dato, vogliamo vedere se una delle due regioni può essere stata influenzata dall'altra prima di emettere la radiazione che noi vediamo.

8. Cosmologia standard

La cosmologia standard si sviluppa dall’equazione di Einstein. A tal fine, viene fornita la più semplice caratterizzazione del tensore energia-impulso, ossia quella di un fluido perfetto (elementi fuori diagonale nulli) con densità e pressione dipendenti dal tempo:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

Eq. 8-1

L’annullarsi della quadridivergenza per il caso della prima colonna:

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Eq. 8-2

Restituisce il principio di conservazione dell’energia nella forma:

$$d\left(\rho R^3\right) = -p d\left(R^3\right)$$

Eq. 8-3

Tale principio si interpreta nel senso che la variazione in energia di un elemento di volume comovente è uguale all’opposto della pressione moltiplicata per la variazione di volume (lavoro subito). Tradizionalmente si assume una relazione di proporzionalità tra densità di energia e pressione:

$$p = \omega\rho$$

Eq. 8-4

In cui si distinguono varie epoche caratterizzate da differenti valori del fattore di proporzionalità:

FASE	ω
VUOTO	-1
RADIAZIONE	1/3
MATERIA	0

Eq. 8-5

Sviluppando l’equazione Eq. 8-3:

$$
\begin{aligned}
& d\left(\rho R^3\right) = -p d\left(R^3\right) \\
& R^3 d\rho + \rho d\left(R^3\right) = -\omega\rho d\left(R^3\right) \\
& R^3 d\rho = -\rho(1+\omega) d\left(R^3\right) \\
& \frac{d\rho}{\rho} = -(1+\omega)\frac{d\left(R^3\right)}{R^3} \\
& \ln\rho - \ln\rho_i = -(1+\omega)\left[\ln R^3 - \ln R_i^3\right] \\
& \ln\frac{\rho}{\rho_i} = -(1+\omega)\ln\frac{R^3}{R_i^3} = \ln\left(\frac{R^3}{R_i^3}\right)^{-(1+\omega)} \\
& \rho = \rho_i\left(\frac{R^3}{R_i^3}\right)^{-(1+\omega)} \propto R^{-3(1+\omega)}
\end{aligned}
$$

Eq. 8-6

Si arriva pertanto alle seguenti dipendenze della densità di energia dal fattore di scala:

FASE	ρ
VUOTO	$\rho \propto \text{cost.}$
RADIAZIONE	$\rho \propto R^{-4}$
MATERIA	$\rho \propto R^{-3}$

Eq. 8-7

9. Equazioni dinamiche dell'evoluzione

L'evoluzione dinamica è ovviamente governata dall'equazione di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

Eq. 9-1

La componente *0-0* dell'equazione in particolare restituisce:

$$\begin{aligned} & -3\frac{\ddot{R}}{R} + 3\left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right] = 8\pi G\rho + \Lambda \\ & \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} \end{aligned}$$

Eq. 9-2

Che è nota come Equazione di Friedmann. Mentre per le componenti *i-j* si ha:

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right] g_{ij} + 3\left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right] g_{ij} = (-8\pi G p + \Lambda) g_{ij} \\ & 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \end{aligned}$$

Eq. 9-3