Dalla Meccanica Classica alle Teorie di Gauge

Luca Alfinito, febbraio 2019

1. Dal lavoro virtuale all'equazione di Eulero-Lagrange

Si definiscono *vincoli olonomi* tutte quelle limitazioni al moto delle *n* particelle di un sistema che possono essere espresse mediante relazioni del tipo [1]:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, t) = 0$$

Eq. 1-1

In cui si riconoscono gli usuali vettori in coordinate cartesiane. Ad esempio il vincolo di una particella a muoversi lungo una traiettoria circolare di raggio *R* si esprime, con una opportuna scelta dell'origine del sistema di coordinate:

$$|\mathbf{r}_1| - R = 0$$

Eq. 1-2

Si definisce *spostamento virtuale infinitesimo* di un sistema una variazione delle coordinate compatibile con i vincoli a cui il sistema ad un certo istante è sottoposto. <u>La compatibilità con i vincoli implica in particolare che gli spostamenti infinitesimi riferiti alle coordinate cartesiane non possano essere scelti tutti arbitrariamente</u>: i vincoli stessi impongono delle precise relazioni tra tali spostamenti. Vedremo che si tratta di un punto essenziale per la trattazione a seguire: l'unica maniera per poter operare una scelta arbitraria di tutti i differenziali è passare ad un sistema di coordinate generalizzate, nel numero degli effettivi gradi di libertà.

Ritornando agli spostamenti "virtuali", sono così chiamati perché possono non avere nulla a che fare con gli spostamenti effettivi che il sistema naturalmente compierebbe in funzione delle sollecitazioni subire, ma al contrario possono essere scelti tenendo esclusivamente conto delle limitazioni imposte dai vincoli.

Sia adesso F^{TOT}_i la forza totale agente su ogni singola particella *i*; essa può essere scomposta nella somma tra le forze attive (etichettate come A) e le forze di reazione vincolare (apice V) e definisce l'equazione del moto:

$$\mathbf{F}_i^{TOT} = \mathbf{F}_i^{A} + \mathbf{F}_i^{V} = \dot{\mathbf{p}}_i$$

Eq. 1-3

Tale equazione può essere riscritta in modo alternativo reinterpretando la derivata temporale dell'impulso come una "controforza efficace" che quando viene aggiunta alle sollecitazioni contribuisce ad un equilibrio "fittizio":

$$\mathbf{F}_i^{TOT} - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$$

Eq. 1-4

Ovviamente questa combinazione produce un lavoro virtuale nullo, in quanto nulli sono tutti gli addendi tra parentesi (mentre non lo sono tutti gli spostamenti):

$$\mathscr{L} = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{TOT} - \dot{\mathbf{p}}_i\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Eq. 1-5

Se i vincoli sono *lisci* (ad esempio in assenza di attriti radenti), questi forniscono forze sempre ortogonali allo spostamento, per cui il loro lavoro è sempre nullo. Dunque l'espressione precedente può essere riscritta considerando solo la parte attiva delle forze:

$$\mathscr{L} = \sum_i \left(\mathbf{F}_i^{A} - \dot{\mathbf{p}}_i\right) \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Eq. 1-6

Passiamo dunque alle coordinate generalizzate, che esprimono il numero effettivo di gradi di libertà *l* e vengono scelte in modo che gli spostamenti virtuali siano indipendenti l'un l'altro:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_l, t) = 0$$

Eq. 1-7

Dalla relazione precedente è facile calcolare la dipendenza tra suddetti spostamenti infinitesimi e i relativi spostamenti cartesiani ad un dato istante (uno spostamento virtuale comprende solamente variazioni di coordinate):

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{dq_k} \delta q_k$$

Eq. 1-8

E le velocità:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{dq_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{dt}$$

Eq. 1-9

Da quest'ultima relazione si evince in particolare (servirà fra qualche passaggio):

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{dq_k}$$

Eq. 1-10

Riscriviamo dunque l'equazione del lavoro virtuale:

$$0=\mathscr{L}=\sum_{i,k}\mathbf{F}_i^A\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\delta q_k-\sum_{i,k}\dot{\mathbf{p}}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\delta q_k=\underbrace{\sum_k Q_k\delta q_k}_{D1}-\underbrace{\sum_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\sum_k\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\delta q_k}_{D2}$$

Eq. 1-11

Dove si è posto in sostituzione nell'elemento *D1*:

$$Q_k=\sum_i\mathbf{F}_i^A\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\qquad m\ddot{\mathbf{r}}_i=\dot{\mathbf{p}}_i$$

Eq. 1-12

Si può pensare che su ogni singola particella possano agire contemporaneamente sia forze *conservative*, il cui lavoro non dipende dal cammino percorso e sono ricavabili dal gradiente di un potenziale, sia forze *non conservative*. In virtù di questa scomposizione:

$$\mathbf{F}_i^A=\mathbf{F}_i^{A(C)}+\mathbf{F}_i^{A(NC)}$$

Eq. 1-13

In questo caso promiscuo l'elemento *D1* si scriverà:

$$Q_k=\sum_i\mathbf{F}_i^{A(C)}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}+\sum_i\mathbf{F}_i^{A(NC)}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}=\sum_i\left(-\nabla_{\mathbf{r}_i}V\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}+\sum_i\mathbf{F}_i^{A(NC)}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}=-\frac{\partial V}{\partial q_k}+Q_k^{(NC)}$$

Eq. 1-14

Con ovvio significato di *V* come termine di energia potenziale. Questo definisce le Q_k come *forze generalizzate*, in quanto applicate alle coordinate generalizzate.

Consideriamo ora *D2*, il secondo addendo a destra dell'uguaglianza.

$$\begin{aligned}D2&=\sum_i m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\sum_k\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\delta q_k=\sum_k\delta q_k\sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\mathbf{r}}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\right)-m_i\dot{\mathbf{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\right)\right]=\\&=\sum_k\delta q_k\sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\mathbf{r}}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\right)-m_i\dot{\mathbf{r}}_i\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{dq_k}\right]=\sum_k\delta q_k\sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}\right)-m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial\mathbf{v}_i}{dq_k}\right]\overset{\frac{\partial\mathbf{r}_i}{dq_k}=\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial\dot{q}_k}}{=}\\&=\sum_k\delta q_k\sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-m_i\mathbf{v}_i\frac{\partial\mathbf{v}_i}{dq_k}\right]=\sum_k\delta q_k\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)-\frac{\partial}{dq_k}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right]\overset{T=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2}{=}\\&=\sum_k\delta q_k\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial}{dq_k}\right]T\end{aligned}$$

Eq. 1-15

Riassemblando dunque tutti i termini si ottiene:

$$0=\mathscr{L}=\sum_k \delta q_k\left[-\frac{\partial V}{\partial q_k}+Q_k^{(NC)}-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{dq_k}\right)\right]=\sum_k \delta q_k\left[\frac{\partial (T-V)}{\partial q_k}+Q_k^{(NC)}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right]$$

Eq. 1-16

Le forze conservative non possono ovviamente dipendere né dal tempo né dalla velocità dei corpi, altrimenti il loro lavoro dipenderebbe dal cammino percorso. Quindi:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

Eq. 1-17

Dunque è lecito introdurre nell'Eq. 1-16 un termine ininfluente *I*:

$$0=\sum_k \delta q_k\left[-\frac{\partial V}{\partial q_k}+\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}}_{I}+Q_k^{(NC)}-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{dq_k}\right)\right]=\sum_k \delta q_k\left[\frac{\partial (T-V)}{\partial q_k}+Q_k^{(NC)}-\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}\right]$$

Eq. 1-18

Poiché le coordinate generalizzate sono state definite affinché gli spostamenti infinitesimi fossero tutti indipendenti, la condizione precedente si realizza solo nel caso in cui:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_k}=Q_k^{(NC)}$$

Eq. 1-19

Definiamo quindi la funzione *Lagrangiana* del sistema come la differenza tra l'energia cinetica e quella potenziale:

$$L=T-V$$

Eq. 1-20

Si arriva quindi all'equazione di Eulero-Lagrange, c.v.d., storicamente riportata con segno opposto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=Q_k^{NC}$$

Eq. 1-21

Ricordiamo per sinossi del capitolo che tale equazione è stata ottenuta con le seguenti assunzioni:

1. Vincoli olonomi;
2. Validità del secondo principio della dinamica;
3. Vincoli lisci;
4. Energia cinetica della meccanica classica.

Ci occupiamo adesso del caso in cui l'Eq. 1-21 è riducibile alla forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Eq. 1-22

Ci si convince facilmente che questo avviene nel caso in cui *tutte* le forze generalizzate, sia conservative che non conservative, possano essere descritte da un potenziale *U* (detto *potenziale generalizzato*) funzione sia delle coordinate che delle velocità generalizzate con la seguente legge:

$$Q_k^{(C)+(NC)} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

Eq. 1-23

In tal caso l'Eq. 1-16 diventa:

$$0 = \mathscr{L} = \sum_k \delta q_k \left[-\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{d q_k}\right)\right] = \sum_k \delta q_k \left[\frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k}\right]$$

Eq. 1-24

Che porta necessariamente a porre:

$$L = T - U$$

Eq. 1-25

Un esempio chiaro di questa casistica è rappresentato dall'elettromagnetismo, per cui la forza agente sulla carica può essere ricavata dalla seguente espressione dell'energia potenziale generalizzata:

$$U = q\phi - q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

Eq. 1-26

Ritornando all'esempio nel caso di una particella libera non relativistica (le coordinate generalizzate sono le coordinate usuali) si ha dunque:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

Eq. 1-27

Considerando ad esempio l'asse *x:*

$$\underbrace{m\frac{d}{dt}v_x+q\frac{dA_x}{dt}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}=\underbrace{-q\frac{\partial\phi}{\partial x}+q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial A_y}{\partial x}v_y+\frac{\partial A_z}{\partial x}v_z\right)}_{\frac{\partial L}{\partial x}}$$

Eq. 1-28

Ossia:

$$m\ddot{x}=q\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial A_y}{\partial x}v_y+\frac{\partial A_z}{\partial x}v_z\right)-q\left(\frac{dA_x}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

Eq. 1-29

Sapendo che:

$$\frac{dA_x}{dt}=\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial A_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial A_x}{\partial z}v_z$$

Eq. 1-30

Sostituendo nell'Eq. 1-29 molti termini si elidono e i rimanenti possono essere riordinati opportunamente:

$$\begin{aligned}m\ddot{x}&=q\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}v_y-\frac{\partial A_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial A_z}{\partial x}v_z-\frac{\partial A_x}{\partial z}v_z\right)-q\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\\&=q\left\{v_y\underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{B_z}-v_z\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{B_y}\right\}-q\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}_{-E_x}=\\&=q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x+qE_x\end{aligned}$$

Eq. 1-31

Avendo ricordato le espressioni per i campi osservabili:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

Eq. 1-32

Si arriva dunque alla nota espressione della forza di Lorentz:

$$\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}+q\mathbf{E}$$

Eq. 1-33

Progredendo nello studio della fisica spesso si tende a dare per scontati questi fondamentali risultati, per poi ritornare a domandarsi solo in seguito: “ma perché la Lagrangiana ha questa forma, ossia la differenza tra un termine cinetico ed uno potenziale?”. La speranza è che con questa premessa la domanda sia superata.

[1] H. Goldstein, “Meccanica classica”, Zanichelli, Seconda Edizione Italiana, ottobre 2005

2. Equazione di Eulero-Lagrange e principio dell'azione stazionaria

Mostriamo in questo capitolo che le equazioni di Lagrange dei sistemi con vincoli olonomi sono ricavabili dal *principio integrale di Hamilton*, che prende in considerazione il moto intero del sistema fra due istanti e piccole variazioni rispetto al moto reale. Stiamo operando nel cosiddetto *spazio delle configurazioni*, che ha tante dimensioni quanti sono i gradi di libertà del sistema e in cui la traiettoria $q(t)$ è una curva che descrive l'evoluzione del sistema stesso.

Il principio intergale di Hamilton descrive i sistemi cosiddetti *monogenici*, ossia quelli per cui tutte le forze attive sono derivabili da un potenziale scalare generalizzato che può essere funzione di coordinate, velocità, tempo; secondo tale principio il moto tra due configurazioni del sistema individuate rispettivamente agli istanti t_1 e t_2 è tale da rendere stazionaria l'*azione*, definita come:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

Eq. 2-1

Dove q è stato inserito tra parentesi quadre per indicare che l'azione è dunque un funzionale relativamente alle possibili traiettorie. Per valutare la stazionarietà dell'azione date quindi per fissate le due configurazioni iniziale e finale dobbiamo quindi considerare tutte le traiettorie che si discostano da quella fisica tranne che agli estremi.

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t) \qquad \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

Eq. 2-2

La variazione dell'azione sarà quindi:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta\dot{q}(t)\big)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\, dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right) dt \overset{parti}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right) - \delta q \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt\end{aligned}$$

Eq. 2-3

Effettuando l'integrazione sull'unico termine che rappresenta una derivata temporale:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

Eq. 2-4

L'ultimo passaggio deriva dal fatto che avevamo imposto l'annullarsi della variazione agli estremi. Deriva invece dall'arbitrarietà della variazione lungo il percorso quanto volevamo dimostrare:

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$$

Eq. 2-5

Introduciamo anche la *funzione di Hamilton* nelle quattro variabili q_1, t_1, q_2, t_2 come azione di una traiettoria fisica che ha per estremi suddette variabili [2]:

$$S(q_1,t_1,q_2,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} L(q_{FISICA}(t),\dot{q}_{FISICA}(t))\, dt$$

Eq. 2-6

Definiamo il momento è invece definito come:

$$p(q,\dot{q})=\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

Eq. 2-7

Non è allora difficile mostrare che:

$$\frac{\partial S(q_1,t_1,q_2,t_2)}{\partial q_1}=-p_1(q_1,t_1,q_2,t_2)$$
$$\frac{\partial S(q_1,t_1,q_2,t_2)}{\partial q_2}=p_2(q_1,t_1,q_2,t_2)$$

Eq. 2-8

<u>DIM.</u>

Operiamo la variazione (mantenendo fissato l'intervallo temporale di evoluzione del sistema):

$$q(t)\rightarrow q(t)+\delta q(t)$$

Eq. 2-9

Si ha allora:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta\dot q\right)dt\overset{parti}{=}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right)-\delta q\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)dt=$$
$$=\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q dt=p_2\delta q_2-p_1\delta q_1$$

Eq. 2-10

Questo risultato mostra in particolare che per determinare la soluzione dell'equazione del moto è sufficiente considerare le derivate della funzione di Hamilton ed invertire:

$$p_1=p_1(q_1,t_1,q_2,t_2)\rightarrow q_2=q_2(t_2;q_1,t_1,p_1)$$

Eq. 2-11

Se invece consideriamo la derivata della funzione di Hamilton rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{\partial S(q_1,t_1,q_2,t_2)}{\partial t_1}=E_1(q_1,t_1,q_2,t_2)$$
$$\frac{\partial S(q_1,t_1,q_2,t_2)}{\partial t_2}=-E_2(q_1,t_1,q_2,t_2)$$

Eq. 2-12

DIM.

Per dimostrarlo fissiamo le posizioni estremali della traiettoria ma ammettiamo una variazione del tempo. Per semplicità utilizziamo questa variazione solo per il tempo finale:

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=L(t_2)\delta t_2-\frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big|_{t_2}\dot q_2\delta t_2=\left(L(t_2)-p_2\dot q_2\right)\delta t_2=-E_2\delta t_2$$

Eq. 2-13

Rovelli [2] fa notare che in questo contesto e con gli strumenti così definiti le variabili *q* e *t* assumono uno "status equivalente", venendo a decadere la distinzione tra variabili dipendenti (*q*) e indipendenti (*t*), condizione necessaria per lo sviluppo della Quantum Loop Gravity. E' infatti possibile scrivere in forma compatta:

$$\nabla_{(q_2,t_2)}=(p_2,-E_2)$$
$$-\nabla_{(q_1,t_1)}=(p_1,-E_1)$$

Eq. 2-14

Per ultimo mostriamo che la funzione di Hamilton è la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi in entrambi i set di variabili, q_1, t_1 e q_2, t_2. Se l'energia è espressa dall'Hamiltoniana come una funzione di posizione e impulso *H(q,p)*:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial q},q\right)=0$$

Eq. 2-15

Finora ci siamo occupati di gradi di libertà associati ad un'entità chiamata sistema di uno o più corpi. Quando invece associamo gradi di libertà a ciascun "punto" dello spazio-tempo, ad esempio attribuendogli il valore di uno o più campi, parliamo di formulazione attraverso la *densità lagrangiana*, come ad esempio nel caso della meccanica dei continui, ma i presupposti su cui si basa l'analisi sono assolutamente identici. In particolare il principio di Hamilton sarà scritto stavolta in funzione della densità Lagrangiana, integrata su tutto lo spazio-tempo:

$$\delta S=\delta\int\Lambda(\psi^{(k)},\psi^{(k)}_{,\mu})\,d^4x=0$$

Eq. 2-16

In cui ψ sono i campi, indicizzati mediante *k*, e $\psi_{,\mu}$ le relative derivate (covarianti). La variazione infinitesima delle funzioni di stato si esprime allora:

$$\begin{aligned}&\psi^{(k)}\rightarrow\psi^{(k)}+\delta\psi^{(k)}\\&\psi^{(k)}_{,\mu}\rightarrow\psi^{(k)}_{,\mu}+\delta\left(\psi^{(k)}_{,\mu}\right)=\left(\psi^{(k)}+\delta\psi^{(k)}\right)_{,\mu}=\psi^{(k)}{}_{,\mu}+\left(\delta\psi^{(k)}\right)_{,\mu}\end{aligned}$$

Eq. 2-17

Calcoliamo dunque la variazione dell'azione *S* in funzione della variazione infinitesima dei campi:

$$\delta S=\int\left[\sum_k\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi^{(k)}}\delta\psi^{(k)}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\psi^{(k)}_{,\mu}\right)}\delta\left(\psi^{(k)}_{,\mu}\right)\right]d^4x=\int\left[\sum_k\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi^{(k)}}\delta\psi^{(k)}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\psi^{(k)}_{,\mu}\right)}\left(\delta\psi^{(k)}\right)_{,\mu}\right]d^4x$$

Eq. 2-18

Il secondo addendo della Eq. 2-18 può essere visto per ogni *k* come uno dei due elementi della derivata di un prodotto, in modo perfettamente analogo al caso di singola particella:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\psi^{(k)}_{,\mu}\right)}\left(\delta\psi^{(k)}\right)_{,\mu}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\psi^{(k)}_{,\mu}\right)}\left(\delta\psi^{(k)}\right)\right)}_{\partial(AB)}-\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\psi^{(k)}_{,\mu}\right)}\right)\delta\psi^{(k)}}_{(\partial A)B}$$

Eq. 2-19

In cui in analogia con il caso di singola particella si può considerare:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\psi_{,\mu}^{(k)}\right)} = \widetilde{\Pi}^{\mu}$$

Eq. 2-20

Dove la tilde sopra la *Π* è stata posta per ricordare che non si tratta di una densità di impulso, perché la derivazione viene effettuata anche rispetto alle coordinate spaziali. In virtù di quanto osservato nella Eq. 2-20, il primo addendo a destra dell'uguale nella Eq. 2-19 può essere interpretato come una quadridivergenza. Applicando dunque il teorema di Gauss, e riscrivendo la Eq. 2-18:

$$\delta S = \int \left[\sum_k \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi^{(k)}} \delta \psi^{(k)} - \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\psi_{,\mu}^{(k)}\right)} \right) \delta \psi^{(k)} \right] d^4 x + \oint \left(\sum_k \delta \psi^{(k)} \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi_{,\rho}^{(k)}} \right) d^3 x_{\rho}$$

Eq. 2-21

Formuliamo l'ipotesi che le variazioni delle funzioni di stato siano comunque nulle sulla frontiera dell'Universo (ciò equivale a dire che nulla di fisicamente interessante accade a partire dai "bordi" del dominio di integrazione): questo permette di annullare l'argomento dell'integrale di flusso nella Eq. 2-21 che perciò diventa:

$$\delta S = \int d^4 x \sum_k \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi^{(k)}} - \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\psi_{,\mu}^{(k)}\right)} \right) \right] \delta \psi^{(k)}$$

Eq. 2-22

Pertanto l'ipotesi del principio variazionale (*δS=0*) equivale a dire, per l'arbitrarietà delle $\delta\psi^{(k)}$:

$$\sum_k \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi^{(k)}} - \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\psi_{,\mu}^{(k)}\right)} \right) \right] = 0$$

Eq. 2-23

[2] C. Rovelli, Covariant Loop Quantum Gravity, Cambridge Press, 2015

3. Il Teorema di Noether

La sintesi del teorema di Noether è che ogni proprietà di simmetria della densità Lagrangiana genera una condizione di conservazione, ossia una quadricorrente a divergenza nulla (quadricorrente conservata), quindi una quantità invariante nel tempo [3].

Supponiamo che l'azione sia invariante sotto un gruppo continuo di trasformazioni parametrizzate da un set di elementi infinitesimi $\lambda^{[a]}$:

$$
\begin{aligned}
& x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \delta x^{\mu} = x^{\mu} + A^{\mu}{}_{[a]}\delta\lambda^{[a]} \\
& \psi^{(i)} \rightarrow \left(\delta^{i}_{j} + M_{[a]}{}^{i}_{j}\delta\lambda^{[a]}\right)\psi^{(j)}
\end{aligned}
$$

Eq. 3-1

In cui A e M definiscono la struttura di tali trasformazioni delle coordinate e dei campi. Il teorema asserisce che , costruendo a quadrivettori:

$$
\Theta^{\mu}_{[a]} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\partial_{\mu}\psi^{(i)}\right)}\left[A^{\nu}{}_{[a]}\partial_{\nu}\psi^{(i)}\left(x^{\mu}\right) - M_{[a]}{}^{i}_{j}\psi^{(j)}\left(x^{\mu}\right)\right] - \left(A^{\mu}{}_{[a]}\Lambda\right)
$$

Eq. 3-2

la loro quadridivergenza è nulla:

$$
\Theta^{\mu}_{[a]}{}_{,\mu} = 0
$$

Eq. 3-3

In virtù di tale proprietà, i quadrivettori in oggetto prendono nome di quadricorrenti conservate.

Diamo adesso una dimostrazione non prettamente rigorosa per i matematici, ma che fornisce l'idea essenziale del procedimento. La traduzione dell'ipotesi del teorema di invarianza dell'azione è banalmente:

$$
\underbrace{\int_{D'} \Lambda\left[\psi'(x'), \partial'_{\mu}\psi'(x')\right] d^{4}x'}_{SX} = \underbrace{\int_{D} \Lambda\left[\psi(x), \partial_{\mu}\psi(x)\right] d^{4}x}_{DX}
$$

Eq. 3-4

Dobbiamo allora sviluppare *SX* al primo ordine. L'idea è scegliere il medesimo dominio *D* di integrazione, e poi correggere l'integrazione sul disavanzo *D'-D* con i valori, calcolati sulla frontiera *∂D*.

$$SX = \int_D \Lambda\left[\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right] d^4x + \int_{\partial D} \Lambda\left[\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right] \delta x^\alpha d^3\sigma_\alpha \approx$$
$$\approx \underbrace{\int_D \Lambda\left[\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right] d^4x}_{A} + \underbrace{\int_{\partial D} \Lambda\left[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right] \delta x^\alpha d^3\sigma_\alpha}_{B}$$

Eq. 3-5

Nel secondo integrale (*B*) è stato possibile scegliere la funzione originale in luogo di ψ' in quanto non si vogliono mantenere infinitesimi di ordine superiore al primo.

Per il primo termine (*A*) si parte invece da questo sviluppo (sempre arrestato al primo ordine, inoltre per comodità usando la variabile *x′*):

$$\psi'^{(i)}(x') = \left(\delta^i_j + M_{[a]}{}^i{}_j \delta\lambda^{[a]}\right) \psi^{(j)}(x'^\mu - \delta\lambda^{[a]} A^\mu{}_{[a]}) = \left(\delta^i_j + M_{[a]}{}^i{}_j \delta\lambda^{[a]}\right)\left[\psi^{(j)}(x'^\mu) - \delta\lambda^{[a]} A^\mu{}_{[a]} \partial_\mu \psi^{(j)}\left(x'^\mu\right)\right] =$$
$$\approx \psi^{(i)}(x'^\mu) + \left[M_{[a]}{}^i{}_j \psi^{(j)}\left(x'^\mu\right) - A^\mu{}_{[a]} \partial_\mu \psi^{(i)}\left(x'^\mu\right)\right] \delta\lambda^{[a]}$$

Eq. 3-6

Quindi, per semplice sostituzione di variabile ($x' \to x$):

$$\psi'^{(i)}(x) \approx \psi^{(i)}(x^\mu) + \left[M_{[a]}{}^i{}_j \psi^{(j)}\left(x^\mu\right) - A^\mu{}_{[a]} \partial_\mu \psi^{(i)}\left(x^\mu\right)\right] \delta\lambda^{[a]} = \psi^{(i)} + \tilde{\delta}\psi^{(i)}$$

Eq. 3-7

Sostituendo in *A*:

$$\int_D \Lambda\left[\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right] d^4x \approx \int_D \left\{ \Lambda\left[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right] + \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} \tilde{\delta}\psi + \frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} \underbrace{\delta\left(\partial_\mu \psi\right)}_{\partial_\mu \tilde{\delta}\psi} \right\} d^4x$$

Eq. 3-8

Si ottiene quindi:

$$SX \approx \underbrace{\int_D \left\{ \Lambda\left[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right] + \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} \tilde{\delta}\psi + \frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} \partial_\mu\left(\tilde{\delta}\psi\right) \right\} d^4x}_{A} + \underbrace{\int_{\partial D} \Lambda\left[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right] \delta x^\alpha d^3\sigma_\alpha}_{B}$$

Eq. 3-9

Mentre per *B*, utilizzando il teorema di Gauss:

$$\int_{\partial D} \Lambda\left[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right] \delta x^\alpha d^3\sigma_\alpha = B = \int_D \partial_\mu \left\{ \Lambda\left[\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right] \delta x^\mu \right\} d^4x$$

Eq. 3-10

Quindi in definitiva, riassemblando i termini:

$$0 = DX - SX \approx -\int_D \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} \tilde{\delta}\psi + \underbrace{\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial_\mu \left(\tilde{\delta}\psi\right)}_{E\partial F} + \partial_\mu \left(\Lambda \delta x^\mu\right) \right\} d^4x =$$

$$= -\int_D \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} \tilde{\delta}\psi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)} \left(\tilde{\delta}\psi\right) \right] - \partial_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)} + \partial_\mu \left(\Lambda \delta x^\mu\right) \right\} d^4x$$

Eq. 3-11

Usando le equazioni del moto si possono eliminare il primo e il terzo termine, operando la sostituzione:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)} = 0$$

Eq. 3-12

Si ottiene:

$$0 = DX - SX \approx -\int_D \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)} \left(\tilde{\delta}\psi\right) \right] + \partial_\mu \left(\Lambda \delta x^\mu\right) \right\} d^4x = -\int_D \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi)} \left(\tilde{\delta}\psi\right) + \left(\Lambda \delta x^\mu\right) \right\} d^4x$$

Eq. 3-13

Sostituendo le espressioni per gli incrementi si ottiene:

$$0 = DX - SX = -\int_D \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi^{(i)})} \left[M_{[a]}{}^i{}_j \psi^{(j)}\left(x^\mu\right) - A^\nu{}_{[a]} \partial_\nu \psi^{(i)}\left(x^\mu\right) \right] \delta\lambda^{[a]} + \left(\Lambda A^\mu{}_{[a]} \delta\lambda^{[a]}\right) \right\} d^4x =$$

$$= \delta\lambda^{[a]} \int_D \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_\mu \psi^{(i)})} \left[A^\nu{}_{[a]} \partial_\nu \psi^{(i)}\left(x^\mu\right) - M_{[a]}{}^i{}_j \psi^{(j)}\left(x^\mu\right) \right] - \left(\Lambda A^\mu{}_{[a]}\right) \right\} d^4x$$

Eq. 3-14

L'espressione tra parentesi graffe è un quadrivettore. L'asserto del teorema segue per l'arbitrarietà del dominio di integrazione e dei δλ.

4. Il Tensore Energia-Impulso

Se ad esempio ammettiamo ancora l'ipotesi che la densità Lagrangiana non dipenda esplicitamente dalle coordinate x^μ allora un esempio di trasformazione che lascia invariata l'azione è (invarianza per traslazioni spazio-temporali):

$$\begin{aligned} &x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \delta^\mu{}_{[\rho]}\delta x^{[\rho]} \\ &\psi^{(i)} \to \psi^{(i)} \end{aligned}$$

Eq. 4-1

Che per un sistema si traduce:

$$\Theta^\mu_{\ [\rho]} = \frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\psi^{(i)}_{,\mu}\right)} A^\nu{}_{[\rho]}\partial_\nu \psi^{(i)}(x) - \delta^\mu_\rho \Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\psi^{(i)}_{,\mu}\right)} \partial_\rho \psi^{(i)}(x) - \delta^\mu_\rho \Lambda$$

Eq. 4-2

Ipotizzando euristicamente che anche la ρ possa essere considerata la seconda componente di un tensore a due indici (se ne ha conferma dimostrando la simmetria di Θ per scambio di indici), innalziamo tale indice:

$$T^{\mu\nu} = \Theta^\mu_{\ [\rho]} g^{\rho\nu} = \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\psi^{(i)}_{,\mu}\right)} \partial_\rho \psi^{(i)}(x) - \delta^\mu_\rho \Lambda\right] g^{\rho\nu} = \frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\psi^{(i)}_{,\mu}\right)} g^{\rho\nu} \psi_{,\rho}{}^{(i)}(x) - g^{\mu\nu}\Lambda$$

Eq. 4-3

Valendo ancora:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$$

Eq. 4-4

Analizziamone le componenti; in primo luogo la *0-0* fornisce:

$$T^{00} = \frac{\partial \Lambda}{\partial\left(\psi^{(i)}_{,0}\right)} g^{\rho 0} \psi_{,\rho}{}^{(i)} - g^{00}\Lambda \overset{\text{Minkowski}}{=} \Pi \dot{\psi} - \Lambda$$

Eq. 4-5

In cui si riconosce la trasformata di Legendre della Lagrangiana: trattasi di una densità di energia.
Per la conservazione della quadricorrente attestata dal teorema di Noether si ha:

$$T^{00}{}_{,0} = -T^{k0}{}_{,k}$$

Eq. 4-6

Quindi da questo deriva immediatamente che le densità di impulso sono:

$$p^k = T^{k0} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\psi^{(i)}_{,k}\right)} g^{\rho 0} \psi_{,\rho}{}^{(i)} - \Lambda g^{k0} \overset{\text{Minkowski}}{=} \frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\psi^{(i)}_{,k}\right)} \psi_{,0}{}^{(i)}$$

Eq. 4-7

Per quanto riguarda le proprietà di simmetria, dobbiamo osservare che il tensore definito nell'Eq. 4-3 non è generalmente simmetrico, ma può essere sempre reso tale ricordando che l'equazione di conservazione del quadrimpulso è preservata aggiungendo un termine della forma:

$$T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \varphi^{\mu\nu\lambda}$$

Eq. 4-8

Con:

$$\varphi^{\mu\nu\lambda} = -\varphi^{\lambda\nu\mu}$$

Eq. 4-9

La precedente derivando dalla necessità che:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \overset{\mu\leftrightarrow\lambda}{=} \frac{\partial^2 \varphi^{\lambda\nu\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = -\frac{\partial^2 \varphi^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = -\frac{\partial^2 \varphi^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = 0$$

Eq. 4-10

Questo infatti assicura che il termine aggiunto non dia un contributo alla quadridivergenza. Si può mostrare che la simmetria del tensore energia-impulso deriva direttamente dalla legge di conservazione del momento angolare [4, pag. 112]-[1, pag. 544], o nel caso di campo scalare dall'invarianza per trasformazioni di Lorentz [3, pag. 255] o ancora da considerazioni sull'andamento al limite di momento delle forze e momento angolare [5, pag. 15-2].
Attestata dunque la simmetria del tensore energia-impulso, seguono direttamente:

$$T^{00}{}_{,0} = -T^{0k}{}_{,k}$$
$$T^{k0}{}_{,0} = -T^{kl}{}_{,l}$$

Eq. 4-11

Tali relazioni di quadridivergenza comportano che l'integrale delle componenti puramente spaziali del tensore si possa sempre esprimere in termini di T^{00} e delle sue derivate.
Dimostriamo per prima l'identità integrale:

$$\int T^{kl} d^3x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int \left(T^{k0}x^l + T^{l0}x^k\right) d^3x$$

Eq. 4-12

DIM.
L'identità si dimostra scomponendo la quadridivergenza:

$$\int T^{k0}{}_{,0} x^l d^3x \overset{\text{quadricorrente conservata}}{=} -\underbrace{\int T^{km}{}_{,m} x^l d^3x}_{T^{km}x^l\big|_{\partial V} - \int T^{km} x^l_{,m} d^3x = 0 - \int T^{kl} d^3x}$$

Eq. 4-13

Dove si è applicata la regola di integrazione per parti e si è posto il primo addendo pari a zero nell'ipotesi di annullamento delle componenti del tensore sulla frontiera di integrazione. Invertendo gli indici e ripetendo lo stesso calcolo:

$$\int T^{l0}{}_{,0} x^k d^3x = \int T^{lk} d^3x = \int T^{kl} d^3x$$

Eq. 4-14

Si arriva dunque:

$$\int T^{kl} d^3x = \frac{1}{2}\int \left(T^{l0}{}_{,0} x^k + T^{k0}{}_{,0} x^l\right) d^3x = \frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial t}\left(T^{l0} x^k + T^{k0} x^l\right) d^3x$$

Eq. 4-15

Da cui la tesi, portando la derivata temporale al di fuori dell'integrale.
In modo analogo si può dimostrare anche la seconda identità:

$$\int \left(T^{l0} x^k + T^{k0} x^l\right) d^3x = \frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} x^k x^l d^3x$$

Eq. 4-16

<u>DIM.</u>

$$\underbrace{\int T^{00}{}_{,0} x^k x^l d^3x}_{\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} x^k x^l d^3x} = -\underbrace{\int T^{m0}{}_{,m} x^k x^l d^3x}_{T^{0m} x^k x^l\big|_{\partial V} - \int T^{m0}\partial_m\left(x^k x^l\right) d^3x = 0 - \int T^{m0}\left(x^l \delta^k_m + x^k \delta^l_m\right) d^3x}$$

Eq. 4-17

Dove ancora una volta si è integrato per parti ed eliminato il termine sulla frontiera. Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} x^k x^l d^3x = \int T^{m0}\left(x^l \delta^k_m + x^k \delta^l_m\right) d^3x$$

Eq. 4-18

Che dimostra la tesi.
Combinando la Eq. 4-16 con la Eq. 4-12 si arriva alla terza identità integrale:

$$\int T^{kl} d^3x = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00} x^k x^l d^3x$$

Eq. 4-19

Vediamo adesso di ricondurre le componenti del tensore energia-impulso a quantità definibili anche in meccanica classica. Oltre alla già citata densità di energia (U) ricordiamo:

- Densità di corrente di energia (S^i)
- Densità di impulso (p^i)
- Tensore degli sforzi (t^{ij})

La densità di corrente di energia costituisce la generalizzazione del vettore di Poynting. Ovviamente devono annullarsi le seguenti quadridivergenze:

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}U + \vec{\nabla}\cdot\vec{p} = 0$$

Eq. 4-20

Da cui segue, fatto non scontato in teorie non relativistiche:

$$\vec{S} = \vec{p}$$

Eq. 4-21

Meno intuitiva la definizione del tensore degli sforzi t^{ij}, che scopriamo essere la parte puramente spaziale del tensore energia-impulso. Esso è classicamente costruito in modo che se consideriamo un elemento di superficie $d\sigma$ orientato verso $\boldsymbol{n}$, la variazione di p^i attraverso $d\sigma$ nell'unità di tempo è data da:

$$\frac{dp^i}{dt} = -t^{ij} n_j d\sigma$$

Eq. 4-22

Da quest'ultima segue:

$$t^{ij} = T^{ij}$$

Eq. 4-23

<u>DIM.</u>
Ricordando che:

$$p^i = T^{i0}$$

Eq. 4-24

Si può quindi considerare la quadridivergenza:

$$\frac{dp^i}{dt} \overset{\text{quadridivergenza}}{=} -T^{ij}{}_{,j} \overset{Gauss}{=} T^{ij} n_j d\sigma = -t^{ij} n_j d\sigma$$

Eq. 4-25

Dove l'ultima uguaglianza segue appunto dall'applicazione del teorema di Gauss in tre dimensioni.

Per ultimo definiamo la grandezza classicamente nota come densità di momento angolare:

$$j^{\alpha\beta} = x^{\alpha}T^{\beta 0} - x^{\beta}T^{\alpha 0}$$

Eq. 4-26

Come chiosa finale del capitolo dimostriamo allora che se il momento angolare è costante il tensore energia-impulso è simmetrico.

$$0 = \frac{d}{dt}\int j^{\alpha\beta} d^3x = \underbrace{\int \left(x^{\alpha}T^{\beta 0}{}_{,0} - x^{\beta}T^{\alpha 0}{}_{,0}\right) d^3x}_{-\int \left(x^{\alpha}T^{\beta m}{}_{,m} - x^{\beta}T^{\alpha m}{}_{,m}\right) d^3x}$$

Eq. 4-27

$$0 = -\int \left(x^{\alpha}T^{\beta m}{}_{,m} - x^{\beta}T^{\alpha m}{}_{,m}\right) d^3x = -\left(x^{\alpha}T^{\beta m} - x^{\beta}T^{\alpha m}\right)\Big|_{\partial V} + \int \left(x^{\alpha}{}_{,m}T^{\beta m} - x^{\beta}{}_{,m}T^{\alpha m}\right) d^3x = \int \left(T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta}\right) d^3x$$

Eq. 4-28

Valida solo se:

$$T^{\beta\alpha} = T^{\alpha\beta}$$

Eq. 4-29

[3] A. Di Giacomo, Lezioni di Fisica Teorica, Edizioni ETS, 1992

[4] Landau, Lifshits, “Teoria dei Campi”, Editori Riuniti, Ed. MIR, II edizione, 1996

[5] E. Fabri, “Argomenti di Astrofisica Relativistica”, Università di Pisa, A.A. 1994-95

5. Teorie di Gauge. Caso generale non Abeliano: SU(*N*)

Ricordiamo in una tabella sinottica le proprietà dei generatori hermitiani T^a di un gruppo Speciale Unitario:

1)	$\forall g \in SU(N) \quad \exists \lambda^1,\ldots,\lambda^d \ t.c. \quad g = \exp(i\lambda^a T^a)$	Rappresentazione in forma esponenziale di un elemento del gruppo connesso all'identità.
2)	$[T^a, T^b] = i f^{ab}{}_c T^c$	Algebra di Lie del gruppo: le costanti $f^{ab}{}_c$ sono dette costanti di struttura
3)	$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$	Scelta di normalizzazione dei generatori, che identifica la "metrica di Killing". Tale metrica è definita positiva per gruppi di Lie compatti come SU(*N*)
4)	$f^{abc} = f^{ab}{}_d \delta^{dc}$	Conseguenza della metrica di Killing sull'innalzamento di un indice nelle costanti di struttura.
5)	$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0$ $\Leftrightarrow -[f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e] T^e = 0$ $\Leftrightarrow f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0$	Identità di Jacobi
6)	$f^{abc} = -f^{cba} = -f^{bac} = -f^{acb}$	Completa antisimmetria degli indici delle costanti di struttura

Consideriamo quindi *N* campi (ad esempio per la QCD campi di Dirac) con masse identiche *m*, e assembliamoli in una colonna:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \psi^N \end{pmatrix}$$

Eq. 5-1

Supponiamo adesso di introdurre una trasformazione di simmetria definita dal gruppo SU(*N*).

$$\begin{aligned} &U_{[N\times N]} = \exp(-ig\lambda^a(x) T^a{}_{[N\times N]}) \\ &\psi \to \psi' = U\psi \\ &\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^+ = \bar{\psi} U^{-1} \end{aligned}$$

Eq. 5-2

Dove l'ultima deriva dall'unitarietà di *U*, T^a sono le matrici *NxN* rappresentazioni dei generatori del gruppo, *g* è un parametro di accoppiamento, introdotto per futura convenienza. Se i parametri λ^a non dipendono dal punto la simmetria è detta globale, altrimenti si parlerà di simmetria locale.

La trasformazione infinitesima sui campi è:

$$\delta\psi^i = -ig\lambda^a T^{a\,i}{}_j \psi^j$$

Eq. 5-3

Se la Lagrangiana è invariante sotto tale trasformazione allora per ciascun generatore indicato con l'apice *a* esiste una quadricorrente conservata secondo il teorema di Noether:

$$J^{a\,\mu}(x) = \frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\partial_\mu \psi^i\right)}\left[\underbrace{A^{a\,\nu}\partial_\nu\psi^i}_{0} - T^{a\,i}{}_j\psi^j\right] - \underbrace{\left(A^{a\,\mu}\Lambda\right)}_{0} = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi^i{}_{,\mu}}(x)T^{a\,i}{}_j\psi^j(x)$$

Eq. 5-4

Vediamo come opera la derivata "standard" sotto Gauge. L'obiettivo è definire, anche attraverso opportune modifiche, un operatore di tipo covariante, ossia tale da rendere commutativo il seguente diagramma (D è la derivata modificata, covariante):

$$\begin{array}{ccc} \psi & \rightarrow & \psi' = U\psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_\mu\psi & \overset{4.}{\rightarrow} & D'_\mu\psi' \end{array}$$

Eq. 5-5

Siamo in particolare interessati alla 4. Per la chiusura del diagramma si deve infatti avere:

$$\underbrace{U\left(D_\mu\psi\right)}_{C1} = \underbrace{D'_\mu\left(U\psi\right)}_{C2}$$

Eq. 5-6

Si può facilmente verificare che il semplice operatore di derivazione non verifica tale proprietà:

$$\underbrace{U\left(\partial_\mu\psi\right)}_{D1} \neq \underbrace{\partial_\mu\left(U\psi\right)}_{D2}$$

Eq. 5-7

Infatti:

$$D2 = \partial_\mu (U\psi) = \partial_\mu \psi' = \partial_\mu \left(\exp\left(-ig\lambda^a(x)T^a\right)\psi\right) = -igT^a \partial_\mu \lambda^a(x) \exp\left(-ig\lambda^a(x)T^a\right)\psi + \exp\left(-ig\lambda^a(x)T^a\right)\partial_\mu \psi =$$
$$= -igT^a \partial_\mu \lambda^a \psi' + \exp\left(-ig\lambda^a(x)T^a\right)\partial_\mu \psi$$

Eq. 5-8

Che differisce da D1 per il primo termine a destra dell'uguale. Questo è sufficiente per concludere che con la derivata semplice la Lagrangiana non è invariante per trasformazioni SU(*N*): per ripristinare l'invarianza si decide allora di realizzare il cosiddetto "accoppiamento minimale", ossia di modificare l'operatore di derivazione con l'aggiunta di un termine (*NxN*) che ne assicuri la covarianza. Questo termine prende il nome di "potenziale di gauge" ed entra nella derivazione nel seguente modo:

$$D_\mu = \partial_\mu + W_\mu(x) \equiv 1_{N\times N} \cdot \partial_\mu + igW_\mu^a(x)T^a$$

Eq. 5-9

Ovviamente il potenziale deve verificare delle proprietà di trasformazione che garantiscano il rispetto dell'Eq. 5-6.

$$\overbrace{U\left[\left(\partial_\mu + W_\mu(x)\right)\psi\right]}^{C1} = \overbrace{\left(\partial_\mu + W'_\mu(x)\right)\left[U\psi\right]}^{C2}$$

Eq. 5-10

Vediamo in che modo questo è possibile:

$$C2 = \left(\partial_\mu + W'_\mu\right)\psi'$$
$$C1 = U\left[\left(\partial_\mu + W_\mu\right)U^{-1}U\psi\right] \overset{U\psi=\psi'}{=} \left[U\left(\partial_\mu + W_\mu\right)U^{-1}\right]\psi' = U\partial_\mu\left(U^{-1}\psi'\right) + UW_\mu U^{-1}\psi' =$$
$$= \left(U\partial_\mu U^{-1}(x)\right)\psi' + UU^{-1}\left(\partial_\mu \psi'\right) + UW_\mu U^{-1}\psi' = \left(U\partial_\mu U^{-1}\right)\psi' + \partial_\mu \psi' + UW_\mu U^{-1}\psi' =$$
$$= \partial_\mu \psi' + \left[U\left(\partial_\mu + W_\mu\right)U^{-1}\right]\psi'$$

Eq. 5-11

Dunque la condizione è verificata se e solo se:

$$W_\mu \rightarrow W'_\mu = U\left(\partial_\mu + W_\mu\right)U^{-1}$$

Eq. 5-12

E per la trasformazione infinitesima si ha:

$$
\begin{aligned}
W'_\mu &= \left(1 - ig\lambda^a T^a\right)\left(\partial_\mu + W_\mu\right)\left(1 + ig\lambda^a(x)T^a\right) = \left(1 - ig\lambda^a T^a\right)\left(ig\partial_\mu\lambda^a(x)T^a + W_\mu + ig\lambda^a(x)W_\mu T^a\right) \approx \\
&\approx ig\partial_\mu\lambda^a(x)T^a + W_\mu + ig\lambda^a W_\mu T^a - ig\lambda^a T^a W_\mu = ig\partial_\mu\lambda^a(x)T^a + W_\mu + ig\lambda^a\left[W_\mu, T^a\right] = \\
&= W_\mu + ig\partial_\mu\lambda^a(x)T^a + ig\lambda^a W_\mu^b\left[T^b, T^a\right] = W_\mu + ig\partial_\mu\lambda^a(x)T^a + ig\lambda^a W_\mu^b\left(if^{ba}{}_d T^d\right)
\end{aligned}
$$

Eq. 5-13

Quindi la variazione infinitesima si scrive:

$$
\begin{aligned}
\delta W_\mu &= ig\partial_\mu\lambda^a(x)T^a - g\lambda^a W_\mu^b f^{ba}{}_d T^d \\
\delta W_\mu^c &= ig\partial_\mu\lambda^c(x) - g\lambda^a W_\mu^b f^{bac}
\end{aligned}
$$

Eq. 5-14

Per la definizione data attraverso l'Eq. 5-9 appare altresì evidente che le derivate covarianti non commutino, come si vede dall'applicazione al generico multipletto:

$$
\begin{aligned}
\left[D_\mu, D_\nu\right]\psi &= \left[\left(\partial_\mu + W_\mu(x)\right)\left(\partial_\nu + W_\nu(x)\right) - \left(\partial_\nu + W_\nu(x)\right)\left(\partial_\mu + W_\mu(x)\right)\right]\psi = \\
&= \partial_\mu\partial_\nu\psi + W_\mu\partial_\nu\psi + \left(\partial_\mu W_\nu(x)\right)\psi + W_\nu\partial_\mu\psi + W_\mu W_\nu\psi + \\
&- \left\{\partial_\nu\partial_\mu\psi + W_\nu\partial_\mu\psi + \left(\partial_\nu W_\mu(x)\right)\psi + W_\mu\partial_\nu\psi + W_\nu W_\mu\psi\right\} = \\
&= \psi\left[\partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x)\right] + \left[W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu\right]\psi
\end{aligned}
$$

Eq. 5-15

Questo ci permette di definire in particolare un tensore detto *campo di forza* o *tensore degli sforzi*:

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x) + \left[W_\mu, W_\nu\right] = \\
&= \partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x) - W_\mu^r W_\nu^s\left[T^r, T^s\right] = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + if^{rs}{}_a W_\mu^r W_\nu^s T^a = \\
&\overset{\text{due permutazioni indici}}{=} \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + if^{ars} W_\mu^r W_\nu^s T^a
\end{aligned}
$$

Eq. 5-16

Segue allora che:

$$
F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + if^{ars} W_\mu^r W_\nu^s
$$

Eq. 5-17

Si può dimostrare facilmente che anche questo tensore si trasforma in modo covariante:

$$
F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}
$$

Eq. 5-18

Il contributo più semplice alla Lagrangiana per descrivere il moto libero dei nuovi campi vettoriali W^a così introdotti è:

$$\Lambda = -\frac{1}{4} F^{a}{}_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

Eq. 5-19

Ovviamente per tali campi non è stato scritto alcun termine Lagrangiano di massa, che "romperebbe la simmetria": date infatti le leggi di trasformazione ricavate per i campi (attraverso *SU(N)*) e quelle definite per i campi vettoriali, qualsiasi ulteriore termine costruito con questi ultimi non lascerebbe la Lagrangiana totale invariante per trasformazioni.