

## Potenziale omogeneo e III Legge di Keplero

Luca Alfinito, febbraio 2019

La terza legge di Keplero può essere ricavata direttamente dalla forma del potenziale gravitazionale e dalle proprietà generali delle Lagrangiane. In particolare consideriamo una trasformazione della coordinata radiale del tipo:

$$r \rightarrow r' = \lambda \cdot r$$

Eq. 0-1

Il potenziale in termini della nuova variabile diventa:

$$U'(r') = -\frac{GM}{r'/\lambda} = \lambda \cdot \left( -\frac{GM}{r'} \right) = \lambda \cdot U(r')$$

Eq. 0-2

Dal momento che le proprietà del moto non variano se la Lagrangiana viene complessivamente moltiplicata per una costante arbitraria<sup>[1]</sup>, il trucco è operare una debita trasformazione anche della coordinata temporale per realizzare tale trasformazione:

$$L'(r', \frac{dr'}{dt'}) = \lambda \cdot L(r', \frac{dr'}{dt'})$$

Eq. 0-3

Se infatti riduciamo la nuova Lagrangiana semplicemente ad una trasformazione di scala di quella originaria, le nuove coordinate sono soggette, rispetto al “nuovo tempo”, alle stesse leggi orarie delle vecchie. In pratica le traiettorie nello spazio delle configurazioni sono le stesse, mentre a cambiare sono solo i titoli degli assi. Da questa proprietà si possono quindi ricavare importanti informazioni sulle traiettorie e sulle caratteristiche del moto.

Definiamo quindi la trasformazione, per un certo parametro  $\mu$  da determinare:

$$t \rightarrow t' = \mu \cdot t$$

Eq. 0-4

Con questa scelta si verifica quindi facilmente che:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

Eq. 0-5

La Lagrangiana viene così riscritta:

$$L' = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 T(v') - \lambda^k U(r') \quad k=1$$

Eq. 0-6

In cui  $k$  è stato introdotto per futura comodità (sarà utile alla successiva generalizzazione della proprietà che stiamo studiando per lo specifico caso gravitazionale). Dall'equazione precedente si deduce che per ricondurre la nuova Lagrangiana ad una trasformazione di scala di quella originaria dobbiamo solo scegliere il parametro  $\mu$  della trasformazione in modo che:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 = \lambda^k \quad k=1$$

Eq. 0-7

La qual cosa risulta verificata per:

$$\mu = \lambda^{1+\frac{k}{2}} \quad k=1$$

Eq. 0-8

Questa relazione implica immediatamente:

$$\mu = \frac{t'}{t} = \left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{3}{2}} = \lambda^{\frac{3}{2}}$$

Eq. 0-9

In particolare tale risultato può essere interpretato in questo modo: se ad una certa dimensione caratteristica della traiettoria  $r$ , diciamo ad esempio l'asse maggiore dell'ellisse, corrisponde un periodo di rivoluzione  $T$ , ad un valore differente  $r'$  definito come in precedenza sarà associato un periodo  $T'$  che soddisfa la relazione:

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{r'}{r}\right)^3$$

Eq. 0-10

Ossia il quadrato del periodo e il cubo della "distanza" sono direttamente proporzionali, c.v.d.:

$$\frac{T'^2}{r'^3} = \frac{T^2}{r^3}$$

Eq. 0-11

Traiamo adesso da questo una legge più generale. Se dunque il potenziale è una funzione omogenea della coordinata, ossia è tale da soddisfare la condizione:

$$U'(q') = \lambda^k \cdot U(q) \quad \text{per} \quad q \rightarrow q' = \lambda \cdot q$$

Eq. 0-12

In cui k può essere adesso anche diverso da 1, dall'esempio precedente ci si convince immediatamente che per il dato cambio di coordinate le traiettorie sono riprodotte se viene ancora soddisfatta anche la condizione di trasformazione dei tempi:

$$\frac{t'}{t} = \left( \frac{q'}{q} \right)^{1+\frac{k}{2}}$$

Eq. 0-13

Nel caso di potenziale Coulombiano quindi  $k=1$ . Vediamo come questa proprietà si applica ad altri tipi di potenziali. Ad esempio per piccole oscillazioni la Lagrangiana si scrive:

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 - \frac{1}{2} K q^2$$

Eq. 0-14

In cui è evidente che:

$$U'(q') = \frac{1}{2} K \left( \frac{q'}{\lambda} \right)^2 = \lambda^{-2} \cdot U(q) \quad \text{per} \quad r \rightarrow r' = \lambda \cdot r$$

Eq. 0-15

Dunque se studiamo il periodo di oscillazione:

$$\frac{T'}{T} = \left( \frac{q'}{q} \right)^{1+\frac{k}{2}} \stackrel{k=-2}{=} 1$$

Eq. 0-16

Operando qualsiasi riscalatura di coordinate il periodo di oscillazione non varia: ne deriva che tale periodo rimane lo stesso per qualsiasi configurazione iniziale (cosa che ci aspettavamo: è infatti noto da altre vie che il periodo di un potenziale quadratico è indipendente dall'ampiezza di oscillazione).

Vediamo il caso di campo di forze uniforme: in questa situazione l'energia potenziale è una funzione lineare della coordinata (ad esempio  $U=Mgy$ ): dunque  $k=-1$  e:

$$\frac{t'}{t} = \left( \frac{y'}{y} \right)^{1+\frac{k}{2}} \stackrel{k=-1}{=} \sqrt{\frac{y'}{y}}$$

Eq. 0-17

La quale ci dice ad esempio che per un corpo in caduta libera il quadrato del tempo di caduta è proporzionale all'altezza iniziale.

Concludiamo con la condizione ancora più generale, ossia di potenziale omogeneo dipendente da più coordinate, che deve essere soddisfatta perché si possa utilizzare lo stesso principio di *time scaling*:

$$U'(q'_1, q'_2, \dots, q'_n) = \lambda^k \cdot U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Eq. 0-18

[1] L. Landau, E. Lifšits, "Meccanica", Ed. Riuniti – Edizioni Mir, 1994