Invarianza, rappresentazioni del gruppo di Poincaré, equazione di Dirac

Luca Alfinito, marzo 2019

1. Significato di invarianza

Ricordiamo che invarianza per una data trasformazione implica la commutatività del seguente diagramma (*U* rappresenta l'evoluzione temporale):

$$\begin{array}{ccc} \psi_{in} & \xrightarrow{A} & \psi_{end} = U\psi_{in} \\ {}^{B}\downarrow & & {}^{C}\downarrow \\ \psi'_{in} = T\psi_{in} & \xrightarrow{D} & \psi'_{end} = U(T\psi_{in}) = T(U\psi_{in}) \end{array}$$

Eq. 1-1

Questo in pratica significa che:

1. Tutte le configurazioni trasformate siano configurazioni possibili nel riferimento iniziale (Freccia A);
2. A parità di condizioni iniziali in un sistema di riferimento trasformato l'evoluzione temporale sia la stessa rispetto al sistema di partenza.

Vediamo che mentre nel caso 1) operiamo una trasformazione attiva dello stato, nel punto 2) lasciamo lo stato invariato, ma ne cambiamo la descrizione trasformando il sistema di riferimento.

2. Invarianza sotto trasformazioni di Lorentz

Il gruppo di Lorentz è definito come il gruppo di trasformazioni lineari che lascia invariante la quantità:

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2$$

Eq. 2-1

Definendo quindi le trasformazioni lineari:

$$dx'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} dx^{\nu}$$

Eq. 2-2

B deve quindi verificare la seguente:

$$\underbrace{\eta_{\alpha\beta}dx'^{\alpha}\,dx'^{\beta}}_{\eta_{\alpha\beta}L^{\alpha}_{\mu}L^{\beta}_{\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} = \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}L^{\alpha}_{\mu}L^{\beta}_{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad [\eta] = [L]^{t}[\eta][L]$$

Eq. 2-3

Quindi definiamo una trasformazione infinitesima ottenibile dall'identità in maniera continua (che definiremo trasformazione *propria*):

$$L^{\vartheta}_{\tau} = \delta^{\vartheta}_{\tau} + \Omega^{\vartheta}_{\tau}$$

Eq. 2-4

La condizione significa allora che:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}L^{\alpha}_{\mu}L^{\beta}_{\nu} = \eta_{\alpha\beta}\left(\delta^{\alpha}_{\mu} + \Omega^{\alpha}_{\mu}\right)\left(\delta^{\beta}_{\nu} + \Omega^{\beta}_{\nu}\right) = \eta_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{\mu}\Omega^{\beta}_{\nu} + \eta_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} =$$
$$= \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\beta}\Omega^{\beta}_{\nu} + \eta_{\alpha\nu}\Omega^{\alpha}_{\mu} \overset{\eta_{\mu\beta}\Omega^{\beta}_{\nu} = \Omega_{\mu\nu}}{=} \eta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu}$$

Eq. 2-5

Ossia:

$$\Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}$$

Eq. 2-6

La più generale matrice antisimmetrica può essere scritta come combinazione lineare dei sei elementi di base:

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma}W^{(\rho\sigma)}{}_{\mu\nu} \qquad W^{(\rho\sigma)}{}_{\mu\nu} = \delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\sigma}_{\nu}\delta^{\rho}_{\mu}$$

Eq. 2-7

Definendo:

$$J^{(\rho\sigma)\mu}{}_{\nu} = i\eta^{\mu\alpha}W^{(\rho\sigma)}{}_{\alpha\nu}$$

Eq. 2-8

Si dimostra che le matrici *J* soddisfano anch'essi l'algebra di Lorentz:

$$\left[J^{(\alpha\beta)}, J^{(\mu\nu)}\right] = i\left(\eta^{\alpha\mu}J^{(\beta\nu)} + \eta^{\beta\nu}J^{(\alpha\mu)} - \eta^{\beta\mu}J^{(\alpha\nu)} - \eta^{\alpha\nu}J^{(\beta\mu)}\right)$$

Eq. 2-9

Una tale relazione permette di considerare gli apici tra parentesi come tensoriali. Individuiamo adesso i "vettori" tridimensionali:

$$\begin{cases} J^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0ijk} J_{(jk)} \\ K^i = J^{(0i)} \end{cases}$$

Eq. 2-10

Si ricorda che ogni elemento dei sei precedenti rappresenta comunque una matrice 4x4 generatrice delle trasformazioni infinitesime di Lorentz. Suddetti vettori (di matrici) trovano collocazione nella matrice nel seguente modo:

$$J^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & K^1 & K^2 & K^3 \\ -K^1 & 0 & -J^3 & J^2 \\ -K^2 & J^3 & 0 & -J^1 \\ -K^3 & -J^2 & J^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 2-11

La definizione dei nuovi vettori J e K porta proprietà importanti. Per prima cosa le nuove regole di commutazione:

$$\begin{aligned} \left[J^i, J^j\right] &= i\varepsilon_{ijk} J^k \\ \left[J^i, K^j\right] &= i\varepsilon_{ijk} K^k \\ \left[K^i, K^j\right] &= -i\varepsilon_{ijk} K^k \end{aligned}$$

Eq. 2-12

Inquadrando **J** come generatore delle rotazioni individuiamo nelle relazioni precedenti le commutazioni tipiche delle grandezze vettoriali. Vediamo dunque se **J** è un buon candidato come tale generatore. A tal scopo ricordiamo che la matrice 3x3 che rappresenta una rotazione infinitesima è antisimmetrica. Si verifica quindi immediatamente che ***J*** è un vettore assiale (pseudovettore), mentre ***K*** è polare (vettore), quest'ultimo rappresentando il generatore dei *boost* di velocità. La trasformazione infinitesima è dunque:

$$L = 1 + i(\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{J} - \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{K})$$

Eq. 2-13

Si può procedere passando per comodità ai due generatori:

$$\mathbf{J}_{\pm} = \frac{\mathbf{J} \pm i\mathbf{K}}{2}$$

Eq. 2-14

Per i quali le regole di commutazione sono:

$$\begin{aligned} \left[J_+^i, J_+^j\right] &= i\varepsilon_{ijk} J_+^k \\ \left[J_-^i, J_-^j\right] &= i\varepsilon_{ijk} J_-^k \\ \left[J_+^i, J_-^j\right] &= 0 \end{aligned}$$

Eq. 2-15

Risulta evidente che i due nuovi generatori obbediscono all'algebra di $SU(2)\otimes SU(2)$.
Quindi le rappresentazioni di dimensione finita sono individuate da due numeri, ciascuno indicante la dimensione del gruppo *SU(2)* di pertinenza.

3. Estensione al gruppo di Poincaré

Si tratta di inserire anche le traslazioni spazio-temporali, che commutano con i generatori di Lorentz e tra di loro nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
&\left[\mathbf{J}, P^0\right]=0\\
&\left[J^i, P^j\right]=i\varepsilon_{ijk}P^k\\
&\left[K^i, P^0\right]=i\eta^{00}P^k\\
&\left[K^i, P^j\right]=-i\eta^{ij}P^0\\
&\left[P^\mu, P^\nu\right]=0
\end{aligned}
$$

Eq. 3-1

In particolare le prime due implicano:

$$\left[J^{\mu\nu}, P^\alpha\right]=i\left(\eta^{\mu\alpha}P^\nu-\eta^{\alpha\nu}P^\mu\right)$$

Eq. 3-2

4. Gli elementi di Casimir della rappresentazione

Qualsiasi rappresentazione irriducibile del gruppo è caratterizzata dal valore degli invarianti, ossia di grandezze costruite con i generatori del gruppo e che con tali generatori commutano. Si definiscono:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_\mu=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma}J^{(\alpha\beta)}P^\sigma\\
&g^\mu=J^{(\mu\beta)}P_\beta
\end{aligned}
$$

Eq. 4-1

Per l'antisimmetria del tensore *ε* e di *J* segue immediatamente:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_\mu P^\mu=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma}J^{(\alpha\beta)}P^\sigma P^\mu \overset{\mu\leftrightarrow\sigma}{=}\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\mu}J^{(\alpha\beta)}P^\mu P^\sigma=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma}J^{(\alpha\beta)}P^\mu P^\sigma=0\\
&g^\mu P_\mu=J^{(\mu\beta)}P_\beta P_\mu=-J^{(\beta\mu)}P_\beta P_\mu=0
\end{aligned}
$$

Eq. 4-2

Valgono le regole di commutazione:

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = i\varepsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\Gamma^\alpha P^\beta \\
&[g_\mu, \Gamma_\nu] = -i\Gamma_\mu P_\nu \\
&[g_\mu, P_\nu] = i(\eta_{\mu\nu}P^2 - P_\mu P_\nu) \\
&[g_\mu, g_\nu] = -i(g_\mu P_\nu - g_\nu P_\mu - \varepsilon_{\alpha\mu\nu\beta}\Gamma^\alpha P^\beta) \\
&[P_\mu, \Gamma_\nu] = 0
\end{aligned}
$$

Eq. 4-3

Qualsiasi invariante potrà essere costruito solo con prodotti invarianti non banali, che sono:

$$P^2, \Gamma^2, g^2, \Gamma \cdot g$$

Di questi gli ultimi due non commutano con le traslazioni. Definiamo quindi:

$$P^2 = m^2$$

Eq. 4-4

Per calcolare la seconda grandezza invariante è comodo considerare il sistema di riferimento in cui $p^i = 0$. Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma} J^{(\alpha\beta)} P^\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ m\mathbf{J} \end{pmatrix} \\
&\Gamma^2 = -m^2 J^2
\end{aligned}
$$

Eq. 4-5

Nel sistema di quiete il modulo del vettore **J** è interpretabile come lo spin della particella. Allora si ha, per le usuali regole:

$$\Gamma^2 = -m^2 s(s+1)$$

Eq. 4-6

Come ultimo dobbiamo citare il segno di p^0, grandezza invariante per trasformazioni di Lorentz omogenee.

5. Rappresentazione gruppo di Lorentz su autostati dell'impulso

Introduciamo σ per indicare altri possibili gradi di libertà, che commutano con il quadrimpulso. Gli autovettori del quadrimpulso soddisfano la:

$$P^\mu |\psi_{p,\sigma}\rangle = p^\mu |\psi_{p,\sigma}\rangle$$

Eq. 5-1

La più generica trasformazione di Poincaré si compone di una traslazione di quadrivettore *a* e di una trasformazione di Lotentz *L*, cosicché il generico operatore sarà definito come *U(L,a)*. L'effetto della traslazione è facilmente scrivibile:

$$U(1,a)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = e^{-ip\cdot a}\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle$$

Eq. 5-2

Mentre l'effetto di una trasformazione propria di Lorentz (ossia che conserva il segno dell'energia e può essere ricavata in maniera continua dall'identità) può essere valutato calcolando:

$$\begin{aligned}P^{\mu}U(L,0)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle &= \overbrace{U(L)U^{-1}(L)}^{1}P^{\mu}U(L)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = \\ &= U(L)\left(L^{\mu}_{\nu}P^{\nu}\right)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = U(L)\left(L^{\mu}_{\nu}p^{\nu}\right)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = \left(L^{\mu}_{\nu}p^{\nu}\right)U(L)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle\end{aligned}$$

Eq. 5-3

Questo ci dice che lo stato trasformato da U(L) è un autovettore dell'impulso trasformato $L^{\mu}{}_{\nu}p^{\nu}$; in generale però dobbiamo ammettere che rimescoli i rimanenti gradi di libertà:

$$U(L)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L,p)\left|\psi_{Lp,\sigma'}\right\rangle$$

Eq. 5-4

Il problema di determinare i coefficienti $C_{\sigma'\sigma}$ può essere affrontato riconducendolo a quello di individuare le rappresentazioni di un gruppo più ristretto, detto piccolo gruppo, che lascia invariato un quadrivettore k di riferimento [Weinberg, pag. 71]. Sia infatti:

$$p^{\mu} = G^{\mu}_{\nu}(p)k^{\nu}$$

Eq. 5-5

Definiamo allora gli stati ad impulso *p* come:

$$\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = N(p)U(G(p))\left|\psi_{k,\sigma}\right\rangle$$

Eq. 5-6

In cui è stato introdotto un fatto di normalizzazione (per i dettagli vedere Weinberg, pag. 74). Vediamo allora che:

$$\begin{aligned}U(L)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle &= N(p)U(L)U(G(p))\left|\psi_{k,\sigma}\right\rangle = N(p)\overbrace{U\left(G(Lp)\right)U\left(G^{-1}(Lp)\right)}^{1}U(L)U\left(G(p)\right)\left|\psi_{k,\sigma}\right\rangle = \\ &= N(p)U\left(G(Lp)\right)U\left(\underbrace{G^{-1}(Lp)LG(p)}_{W(L,p)}\right)\left|\psi_{k,\sigma}\right\rangle\end{aligned}$$

Eq. 5-7

Ci si convince facilmente che *W* lascia *k* invariato, pur rimescolando i gradi di libertà rimanenti. Dunque *W* è un elemento del piccolo gruppo e la sua rappresentazione è:

$$U(W)\left|\psi_{k,\sigma}\right\rangle = U\left(\underbrace{G^{-1}(Lp)LG(p)}_{W}\right)\left|\psi_{k,\sigma}\right\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\left|\psi_{k,\sigma'}\right\rangle$$

Eq. 5-8

I coefficienti D forniscono una rappresentazione del piccolo gruppo. E' infatti facile mostrare che:

$$D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1)$$

Eq. 5-9

Vediamo come tale rappresentazione è sufficiente a risolvere il problema, posto inizialmente, di mappare completamente il gruppo delle trasformazioni di Lorentz.

$$\begin{aligned}
&W(L,p) = G^{-1}(Lp)LG(p) \\
&\Rightarrow \quad U(L)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = N(p)U(G(Lp))\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\left|\psi_{k,\sigma'}\right\rangle = N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)U(G(Lp))\left|\psi_{k,\sigma'}\right\rangle = \\
&= N(p,Lp)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\left|\psi_{Lp,\sigma'}\right\rangle := \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(L,p)\left|\psi_{Lp,\sigma'}\right\rangle
\end{aligned}$$

Eq. 5-10

L'idea di costruire una rappresentazione più generale a partire dalla rappresentazione del piccolo gruppo prende nome di metodo delle *rappresentazioni indotte*. Il coefficiente di normalizzazione è scelto per ottenere invarianza di Lorentz sull'elemento di integrazione:

$$\left\langle \psi_{p',\sigma'} \middle| \psi_{p,\sigma} \right\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta_{\sigma'\sigma}\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$$

Eq. 5-11

6. Stati $E^2>0$

Per stati con $E^2>0$ è conveniente scegliere $k=(\pm m,0,0,0)$, il cui piccolo gruppo è il gruppo delle rotazioni spaziali SO(3). Individuiamo un boost che faccia passare l'impulso da *k* a *p*. Una scelta comoda è:

$$\begin{aligned}
G_0^0(p) &= \gamma = \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{m} \\
G_0^i(p) &= G_i^0(p) = \frac{p_i}{|\mathbf{p}|}\sqrt{\gamma^2 - 1} \\
G_k^i(p) &= \delta_k^i + (\gamma - 1)\frac{p_i}{|\mathbf{p}|}\frac{p_k}{|\mathbf{p}|}
\end{aligned}$$

Eq. 6-1

I vettori della base sono dati, per definizione:

$$\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = N(p)U(G(p))\left|\psi_{k,\sigma}\right\rangle = e^{-i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{K}}\left|\psi_{0,\sigma}\right\rangle$$

Eq. 6-2

Per completare la costruzione della rappresentazione, consideriamo come agisce prima nel caso delle rotazioni, poi sui boost.

ROTAZIONI

$$U(R_{\theta\mathbf{n}})\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = U(R_{\theta\mathbf{n}})\underbrace{U\big(G(p)\big)}_{e^{-i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{K}}}\left|\psi_{k=0,\sigma}\right\rangle = U(R_{\theta\mathbf{n}})\underbrace{U\big(G(p)\big)}_{e^{-i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{K}}}\overbrace{U^{-1}(R_{\theta\mathbf{n}})U(R_{\theta\mathbf{n}})}^{1}\left|\psi_{k=0,\sigma}\right\rangle$$

Eq. 6-3

Il prodotto dei primi tre elementi non è altro che una trasformazione del boost:

$$U(R_{\theta\mathbf{n}})U\big(G(p)\big)U^{-1}(R_{\theta\mathbf{n}}) \overset{U^{-1}(R_{\theta\mathbf{n}})\mathbf{K}U(R_{\theta\mathbf{n}})=R_{\theta\mathbf{n}}\mathbf{K}}{=} e^{-i\left(R_{\theta\mathbf{n}}\boldsymbol{\alpha}\right)\mathbf{K}}$$

Eq. 6-4

Quindi:

$$U(R_{\theta\mathbf{n}})\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = \left(e^{i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}}\right)_{\sigma'\sigma}\left|\psi_{R_{\theta\mathbf{n}}p,\sigma'}\right\rangle$$

Eq. 6-5

Interessante notare che valgono qui le stesse proprietà delle particelle non relativistiche, quindi è possibile recuperare tutto il formalismo e i relativi risultati (coefficienti di Clebsch-Gordan ecc.).

BOOST

Recuperando l’Eq. 5-10 (per notazione sostituiamo *R* al posto di *C*):

$$U(L)\left|\psi_{p,\sigma}\right\rangle = R_{\sigma'\sigma}(L,p)\left|\psi_{Lp,\sigma'}\right\rangle$$

Eq. 6-6

Scriveremo *R(L,P)* nella forma:

$$R(L,p) = e^{-i\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\varphi(L,P)}$$

Eq. 6-7

Che prende il nome di rotazione di Wigner e il suo calcolo esatto per trasformazioni finite è riportato ad esempio nel Di Giacomo [par. 9.1.4. pag. 188]. Ci limitiamo ad osservare che per trasformazioni al primo ordine in β:

$$L^i_j = \delta^i_j + \frac{\beta}{p_0 + m}\left(n^i p_j - p^i n_j\right)$$

Eq. 6-8

Da cui:

$$R \approx 1 - i\frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{p}}{p_0 + m}\mathbf{J}$$

Eq. 6-9

Con $\left(J^i\right)_{jk} = i\varepsilon_{jik}$

7. Spin ½: l'equazione di Dirac

Costruiamo per esercizio la rappresentazione per spin frazionario ½. Dobbiamo fin da questo punto operare una scelta di carattere epistemologico: la dimensione della rappresentazione. Per pura comodità (forse) si sceglie di utilizzare una dimensione finita minima, ossia 2. A tal proposito si osserva che esistono solo 2 rappresentazioni in equivalenti di tale dimensionalità, ossia:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{di dimensione } 2 \times 1$$
$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{di dimensione } 1 \times 2$$

Ricordando l'algebra di $\mathbf{J}_+$ e $\mathbf{J}_-$ si ha l'ovvia parentela con operatori definiti attraverso le matrici di paoli. Per entrambe le rappresentazioni le trasformazioni infinitesime sono del tipo:

$$L \approx 1 + i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J} - i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{K}$$

Eq. 7-1

Sono quindi costruibili i generatori di SU(2) nelle due rappresentazioni:

$$\left(\frac{1}{2},0\right) \quad \mathbf{J}_+ = \frac{\mathbf{J}+i\mathbf{K}}{2} \quad \begin{cases} \mathbf{J} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ \mathbf{K} = -i\dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{cases} \qquad S_{\left(\frac{1}{2},0\right)}(L) = e^{i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}} = e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\alpha})}$$

$$\left(0,\frac{1}{2}\right) \quad \mathbf{J}_- = \frac{\mathbf{J}-i\mathbf{K}}{2} \quad \begin{cases} \mathbf{J} = \dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ \mathbf{K} = i\dfrac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{cases} \qquad S_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}(L) = e^{i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}+\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}} = e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\alpha})}$$

Eq. 7-2

Segue immediatamente una proprietà che risulterà fondamentale per il seguito:

$$S^{+}{\left(\tfrac{1}{2},0\right)}(L) = e^{-i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}} \Rightarrow \left(S^{+}\right)^{-1}{\left(\tfrac{1}{2},0\right)}(L) = e^{i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}+\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}} = S_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}(L)$$

Eq. 7-3

Essendo **J** un vettore assiale e **K** un vettore polare, sotto parità solo il secondo cambia di segno per cui le due rappresentazioni si invertono:

$$\left(\frac{1}{2},0\right) \overset{P}{\leftrightarrow} \left(0,\frac{1}{2}\right)$$

Eq. 7-4

Per questo motivo la necessità di costruire una rappresentazione invariante sotto parità comporta utilizzare una rappresentazione <u>riducibile</u> del gruppo di Lorentz costruita come:

$$\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus \left(0,\frac{1}{2}\right)$$

Eq. 7-5

Per tale rappresentazione composta si può allora utilizzare uno spazio composto da 2 spinori (spazio di bispinori). Nella rappresentazione detta di Kramers, che deriva naturalmente dal ragionamento fin qui seguito, i generatori del gruppo assumono la forma:

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\qquad \mathbf{K}=\begin{pmatrix}-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

Eq. 7-6

Scriviamo dunque il bispinore di Kramers:

$$\psi=\begin{pmatrix}\xi_{2\times 1}\\ \eta_{2\times 1}\end{pmatrix}$$

Eq. 7-7

Seguendo allora l'idea di Dirac, pur mantenendo l'impostazione data, cerchiamo un invariante di Lorentz costruito mediante prodotto scalare con il quadrimpulso; vedremo che perché tale invariante abbia senso sono effettivamente necessari entrambi i sottospazi. Opereremo per prima cosa nello spazio (½,0). Se assumiamo la trasformazione del quadrimpulso:

$$p'=Lp$$

Eq. 7-8

Allora vale che è invariante per trasformazioni di Lorentz, ossia assume la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento, un'equazione di questo tipo:

$$(p_0+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta=x\xi$$

Eq. 7-9

La qual cosa si può dimostrare applicando la trasformazione:

$$\begin{aligned}
&S_{(1/2,0)}(p_0+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta=S_{(1/2,0)}x\xi\\
&S_{(1/2,0)}(p_0+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\overbrace{S^+(1/2,0)(S^+)^{-1}(1/2,0)}^{1}\eta=xS_{(1/2,0)}\xi\\
&\underbrace{S_{(1/2,0)}(p_0+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})S^+(1/2,0)}_{A}\eta'=x\xi'
\end{aligned}$$

Eq. 7-10

Rimane ora da verificare, e lo faremo di seguito, che:

$$A=S_{(1/2,0)}(L)(p_0+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})S^+(1/2,0)(L)\stackrel{?}{=}(p'_0+\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma})$$

Eq. 7-11

Dove:

$$p'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$$

Eq. 7-12

Per dimostrare questo dobbiamo lavorare con trasformazioni infinitesime utilizzando le due identità, nello spazio 2x2 e recuperare le proprietà principali delle matrici di Pauli:

$$\begin{aligned} &\sigma_i \sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = (\sigma_3)^2 = \mathbf{1} \\ &[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ &\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbf{1} \end{aligned}$$

Eq. 7-13

Banalmente allora:

$$\begin{aligned} &[\theta_i\sigma_i, \sigma_j] = \theta_i[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\theta_i\sigma_k = -2i\varepsilon_{jik}\theta_i\sigma_k \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{\theta\sigma}, \boldsymbol{\sigma}] = -2i\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\sigma} \\ &\{\alpha_i\sigma_i, \sigma_j\} = \alpha_i\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\alpha_i\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{\alpha\sigma}, \boldsymbol{\sigma}\} = 2\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

Eq. 7-14

Risulterà utile anche la formula:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a\sigma})(\mathbf{b\sigma}) = a_i\sigma_i b_j\sigma_j = a_i b_j \sigma_i\sigma_j = a_i b_j (i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}) = \\ &= i\varepsilon_{kij} a_i b_j \sigma_k + a_i b_i = i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{ab} \end{aligned}$$

Eq. 7-15

Da cui derivano immediatamente commutatori ed anticommutatori:

$$\begin{aligned} &[(\mathbf{a\sigma}), (\mathbf{b\sigma})] = 2i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\boldsymbol{\sigma} \\ &\{(\mathbf{a\sigma}), (\mathbf{b\sigma})\} = 2\mathbf{ab} \end{aligned}$$

Eq. 7-16

Riscriviamo dunque per comodità la rappresentazione della trasformazione infinitesima nello spazio (1/2,0):

$$\begin{aligned} &S_{(1/2,0)}(L) = e^{i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}} \approx 1 + i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &S^{+}{}_{(1/2,0)}(L) = e^{-i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}} \approx 1 - i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \end{aligned}$$

Eq. 7-17

Vale pertanto:

$$
\begin{aligned}
&S_{(1/2,0)}(L)\left(p^0\mathbf{1}+\mathbf{p\sigma}\right)S^{+}{}_{(1/2,0)}(L) = Sp^0\mathbf{1}S^{+} + S\mathbf{p\sigma}S^{+} = \\
&\approx (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha\sigma})p^0\mathbf{1} + \left(1+i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\mathbf{p\sigma}\left(1-i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) = \\
&= (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha\sigma})p^0\mathbf{1} + \left(1+i\boldsymbol{\theta}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\left(\mathbf{p\sigma}-\frac{i}{2}(\mathbf{p\sigma})(\boldsymbol{\theta\sigma})-\frac{1}{2}(\mathbf{p\sigma})(\boldsymbol{\alpha\sigma})\right) = \\
&= (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha\sigma})p^0\mathbf{1} + \left(\mathbf{p\sigma}+\frac{i}{2}(\boldsymbol{\theta\sigma})(\mathbf{p\sigma})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha\sigma})(\mathbf{p\sigma})-\frac{i}{2}(\mathbf{p\sigma})(\boldsymbol{\theta\sigma})-\frac{1}{2}(\mathbf{p\sigma})(\boldsymbol{\alpha\sigma})\right) = \\
&= (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha\sigma})p^0\mathbf{1} + \left(\mathbf{p\sigma}+\frac{i}{2}[(\boldsymbol{\theta\sigma}),(\mathbf{p\sigma})]-\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{\alpha\sigma}),(\mathbf{p\sigma})\}\right) = \\
&= (\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha\sigma})p^0\mathbf{1} + \mathbf{p\sigma} - (\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} = \\
&= \left(p^0-\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\right)\mathbf{1} + \left(\mathbf{p}-(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{p})-\boldsymbol{\alpha}p^0\right)\boldsymbol{\sigma} = p^0{}'\mathbf{1}+\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}
\end{aligned}
$$

Eq. 7-18

Per una rotazione pura (**α**=0) è immediato verificare l'Eq. 7-11. Per un boost puro, dalla forma vediamo che **α** è legato alla rapidità nella direzione del boost stesso. Abbiamo dunque dimostrato che:

$$S_{(1/2,0)}(L)\left(p_0+\mathbf{p\sigma}\right)S^{+}{}_{(1/2,0)}(L)=\left(p'_0+\mathbf{p}'\boldsymbol{\sigma}\right)$$

Eq. 7-19

Dunque che è invariante sotto trasformazioni di Lorentz nella rappresentazione scelta un'equazione del tipo:

$$\left(p_0+\mathbf{p\sigma}\right)\eta = x\xi$$

Eq. 7-20

In modo analogo si può dimostrare che nella rappresentazione (0, ½) un'equazione invariante è:

$$\left(p_0-\mathbf{p\sigma}\right)\xi = y\eta$$

Eq. 7-21

Il più generale sistema di equazione del I ordine covariante ha la forma:

$$\begin{cases}(p_0 + \mathbf{p\sigma})\eta = x\xi \\ (p_0 - \mathbf{p\sigma})\xi = y\eta\end{cases}$$

Eq. 7-22

Dall'invarianza sotto parità del sistema generale si ottiene *x=y*. Inoltre si può ottenere un altro importante risultato moltiplicando la prima delle Eq. 7-29 per l'operatore della seconda:

$$\underbrace{(p_0 - \mathbf{p\sigma})(p_0 + \mathbf{p\sigma})}_{p_0{}^2 - (\mathbf{p\sigma})^2}\eta = x(p_0 - \mathbf{p\sigma})\xi = xy \overset{x=y}{=} x^2\eta$$

Eq. 7-23

Riutilizzando allora l'importante risultato dell'Eq. 7-15, applicato al caso particolare:

$$(\mathbf{p\sigma})^2 = |\mathbf{p}|^2\mathbf{1}$$

Eq. 7-24

In definitiva:

$$x^2\eta = \left[p_0{}^2 - (\mathbf{p\sigma})^2\right]\eta = \left(p_0{}^2 - \mathbf{p}^2\right)\eta = m^2\eta \quad \Rightarrow \quad x = m$$

Eq. 7-25

Le due Eq. 7-22 si sintetizzano nell'equazione bispinoriale:

$$\begin{pmatrix} 0 & [p_0\mathbf{1} + \mathbf{p\sigma}]_{2x2} \\ [p_0\mathbf{1} - \mathbf{p\sigma}]_{2x2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{2\times1} \\ \eta_{2\times1}\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}\xi_{2\times1} \\ \eta_{2\times1}\end{pmatrix}$$

Eq. 7-26

Scriveremo allora in modo ancora più compatto introducendo le matrici 4x4:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2x2} \\ \mathbf{1}_{2x2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma}_{2x2} \\ \boldsymbol{\sigma}_{2x2} & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 7-27

Con questa scelta si vede infatti che:

$$\left(\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}\right)\psi = m\psi$$

Eq. 7-28

Volendo introdurre la notazione "covariante a vista" per cui l'equazione di Dirac si esprime:

$$\gamma^{\mu} p_{\mu}\psi = m\psi$$

Eq. 7-29

Dobbiamo però verificare le proprietà di Υ^{μ}. Per fare questo, consideriamo la rappresentazione totale e valutiamo:

$$S(L)\gamma^{\mu} p_{\mu}\psi \overset{mS(L)\psi}{=} S\gamma^{\mu}S^{-1}Sp_{\mu}S^{-1}S\psi$$

Eq. 7-30

Poiché come era noto:

$$Sp_{\mu}S^{-1} = \left(L^{-1}\right)_{\mu}^{\nu} p_{\nu}$$

Eq. 7-31

Allora si ottiene, per preservare la covarianza, che anche Υ trasforma come un quadrivettore:

$$S\gamma^{\mu}S^{-1} = \left(L^{-1}\right)_{\lambda}^{\mu}\gamma^{\lambda}$$

Eq. 7-32

Nota bene: la rappresentazione *S(L)* NON è unitaria (risulta evidente dalla forma delle Eq. 7-2, e comunque dalla non compattezza del gruppo di Lorentz). Dunque, considerando due spinori ψ_1 e ψ_2:

$$\psi_2^{+}(x)\psi_1(x) \rightarrow \psi_2^{+}(L^{-1}x+a)\underbrace{S^{+}(L)S(L)}_{\neq 1}\psi_1(L^{-1}x+a)$$

Eq. 7-33

Se voglio costruire una densità scalare devo allora considerare:

$$\overline{\psi}_2 = \psi_2^{+}\gamma^{0}$$

Eq. 7-34

Con questa scelta:

$$\overline{\psi}_2(x)\psi_1(x) = \psi_2^{+}\gamma^{0}\psi_1(x) = \psi_2^{+}\gamma^{0}\overbrace{S^{-1}(L)S(L)}^{=1}\psi_1(x)$$

Eq. 7-35

Si può verificare questa proprietà:

$$\gamma^0 = S^+(L)\gamma^0 S(L) \quad \Rightarrow \quad \gamma^0 S^{-1}(L) = S^+(L)\gamma^0$$

Eq. 7-36

Pertanto:

$$\overline{\psi}_2(x)\psi_1(x) = \psi_2^+ S^+(L)\gamma^0 S(L)\psi_1(x) = \overline{\psi}_2(L^{-1}x+a)\psi_1(L^{-1}x+a)$$

Eq. 7-37

Che dimostra come tale prodotto di termini si comporti come una densità scalare.

8. Autostati dell'impulso

Possiamo riscrivere l'Eq. 7-28 moltiplicando per γ^0:

$$\begin{aligned}
&\gamma^0\left(\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}\right)\psi = m\gamma^0\psi \\
&p^0\psi - \underbrace{\gamma^0\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{a}}\mathbf{p}\,\psi = m\gamma^0\psi \\
&p^0\psi - \mathbf{a}\mathbf{p}\,\psi = m\gamma^0\psi
\end{aligned}$$

Eq. 8-1

Vogliamo adesso operare un cambiamento di rappresentazione che diagonalizzi γ^0 (rappresentazione di Pauli).

$$\begin{aligned}
&\psi \to U\psi \\
&\gamma^\mu \to U\gamma^\mu U^{-1} \\
&U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad U\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Eq. 8-2

Con questa scelta:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2x2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2x2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_{2x2} \\ -\boldsymbol{\sigma}_{2x2} & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 8-3

E' importante notare che l'algebra delle matrici Υ rimane invariata con queste trasformazioni:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

Eq. 8-4

Stiamo cercando per prima cosa una soluzione ad energia positiva e che abbia un impulso definito. A causa dell'invarianza per traslazioni tale soluzione sarà del tipo:

$$\psi_{\mathbf{p}}(x) = e^{-ipx}u(\mathbf{p}) \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad u = \begin{pmatrix} u_{1_{[2\times1]}} \\ u_{2_{[2\times1]}} \end{pmatrix}$$

Eq. 8-5

Si ricavano quindi, sostituendo nell'Eq. 7-28, le due equazioni accoppiate per gli spinori:

$$\begin{cases} p^0 u_1 - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}u_2 = mu_1 \\ -p^0 u_2 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}u_1 = mu_2 \end{cases}$$

Eq. 8-6

Tale sistema ammette due soluzioni indipendenti, distinte dall'indice *r*:

$$u(r,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{p^0 + m}\right) w_r \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\sqrt{p^0 + m}} w_r \end{pmatrix} \qquad w_r^+ w_s = \delta_{rs}$$

Eq. 8-7

Con questa scelta:

$$\overline{u}(r,\mathbf{p})u(s,\mathbf{p}) = 2m\delta_{rs}$$

Eq. 8-8

Come base canonica si possono scegliere ad esempio gli autostati di σ_z:

$$w_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eq. 8-9

Cerchiamo adesso soluzioni ad energia negativa, del tipo:

$$\psi^{(-)}{}_{\mathbf{p}}(x) = e^{ip^0 t + i\mathbf{px}}\tilde{u}(\mathbf{p}) \qquad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Eq. 8-10

Si individuano anche in questo caso due soluzioni:

$$\tilde{u}(r,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\sqrt{p^0+m}}\tilde{w}_r \\ \left(\sqrt{p^0+m}\right)\tilde{w}_r \end{pmatrix} \qquad w_r^+ w_s = \delta_{rs}$$

Eq. 8-11

Si pone allora $v(r,\mathbf{p}) = \tilde{u}(r,-\mathbf{p})$. Con questa scelta:

$$v(r,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\sqrt{p^0+m}}\tilde{w}_r \\ \left(\sqrt{p^0+m}\right)\tilde{w}_r \end{pmatrix} \qquad \bar{v}(r,\mathbf{p})v(s,\mathbf{p}) = -2m\delta_{rs}$$

Eq. 8-12

Gli spinori appena definiti soddisfano le equazioni:

$$\begin{aligned} \left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)u(r,\mathbf{p}) &= 0 \\ \left(\gamma^\mu p_\mu + m\right)v(r,\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned}$$

Eq. 8-13

Queste quattro soluzioni individuate, oltre a costituire un insieme completo di spinori per la descrizione degli autostati dell'impulso, formano un insieme di vettori indipendenti e ortogonali rispetto alla metrica γ^0:

$$\begin{aligned} \bar{u}(r,\mathbf{p})u(s,\mathbf{p}) &= 2m\delta_{rs} \qquad & \bar{v}(r,\mathbf{p})v(s,\mathbf{p}) &= -2m\delta_{rs} \\ \bar{u}(r,\mathbf{p})v(s,\mathbf{p}) &= 0 \qquad & \bar{v}(r,\mathbf{p})u(s,\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned}$$

Eq. 8-14

Infine la completezza fornisce:

$$\begin{aligned} \sum_r \bar{u}(r,\mathbf{p})u(r,\mathbf{p}) &= \gamma^\mu p_\mu + m \\ \sum_r \bar{v}(r,\mathbf{p})v(r,\mathbf{p}) &= \gamma^\mu p_\mu - m \end{aligned}$$

Eq. 8-15