Teoria di Yang-Mills e interazione elettrodebole

Luca Alfinito, dicembre 2019

1. La simmetria per trasformazione unitaria locale

Consideriamo un insieme di campi che risultano sperimentalmente equivalenti dal punto di vista di una determinata interazione (ad esempio lo spin isotopico per le interazioni forti, trascurando le differenze di masse).

Se dunque la fisica appare invariante per una trasformazione tra questi campi, la relativa Lagrangiana deve essere invariante per trasformazioni del tipo (sottendendo gli indici di campo):

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(x)\psi(x)$$

Eq. 1-1

Per cui si è preferita la formulazione locale (ossia: trasformazione dipendente dal punto), se non altro perché più generale possibile rispetto a quella globale, che ne rappresenta un caso particolare. Nella formula precedente i campi coinvolti nel "rimescolamento" rappresentano un *multipletto* a cui può essere associato un gruppo speciale (determinante 1) unitario (per preservare la somma delle probabilità) della dimensione del multipletto stesso.

2. Trasporto parallelo e derivata covariante

Si presenta allora la questione, analoga al caso della relatività generale, di definire un operatore differenziale che consenta di confrontare i campi in *x* (punto A) con quelli in *x+dx* (punto B), tenendo conto di questo rimescolamento. A tal proposito si può introdurre la nozione di *trasporto parallelo*, ossia generare in *x* un multipletto della forma:

$$\psi_{TP_{B\to A}}(x) = \left(1 + i\Gamma_\mu dx^\mu\right)\psi(x+dx)$$

Eq. 2-1

Che sviluppato al primo ordine si può scrivere:

$$\psi_{TP_{B\to A}}(x) = \left(1 + i\Gamma_\mu dx^\mu\right)\left(\psi(x) + \partial_\nu \psi_A dx^\nu\right) \approx \psi(x) + \left(i\Gamma_\mu + \partial_\mu\right)\psi_A dx^\mu$$

Eq. 2-2

Questo ci permette di definire un operatore *differenziale covariante*, in piena analogia con il caso della relatività generale, per cui:

$$D_\mu \psi(x) dx^\mu = \psi_{TP_{B\to A}}(x) - \psi_A = (i\Gamma_\mu + \partial_\mu)\psi(x) dx^\mu$$

Eq. 2-3

Si vuole definire in particolare il trasporto parallelo perché valga:

$$D'_\mu (U\psi) = U(D_\mu \psi)$$

Eq. 2-4

Che ci restituisce la modalità di trasformazione degli operatori di connessione:

$$\begin{aligned}
&(i\Gamma'_\mu + \partial_\mu)(U\psi) = U(i\Gamma_\mu + \partial_\mu)\psi \\
&\Leftrightarrow i\Gamma'_\mu U\psi + (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi) = iU\Gamma_\mu \psi + U(\partial_\mu \psi) \\
&\Leftrightarrow \Gamma'_\mu = i(\partial_\mu U)U^{-1} + U\Gamma_\mu U^{-1}
\end{aligned}$$

Eq. 2-5

Vediamo che questo comporta anche la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
\psi_{TP_{B\to A}}(x) & \overset{TP}{\leftarrow} & \psi(x+dx) \\
\downarrow^{U(x)} & & \downarrow^{U(x+dx)} \\
\psi'_{TP_{B\to A}}(x) = U(x)\psi_{TP_{B\to A}}(x) & \overset{TP}{\leftarrow} & \psi'(x+dx) = U(x+dx)\psi(x,dx)
\end{array}$$

Eq. 2-6

Dimostriamo il precedente risultato considerando i due percorsi commutanti a partire dall'angolo alto a destra del diagramma:

$$\begin{aligned}
&1.TP-U: \quad \psi'_{TP_{B\to A}}(x) = U(x)\psi_{TP_{B\to A}}(x) = U(x)(1 + i\Gamma_\mu dx^\mu)\psi(x+dx) = \\
&\approx U(x)\psi(x) + U(x)(\partial_\mu \psi)dx^\mu + iU(x)\Gamma_\mu \psi(x) dx^\mu \\
&2.U-TP: \quad \psi'_{TP_{B\to A}}(x) = (1 + i\Gamma'_\mu dx^\mu)U(x+dx)\psi(x+dx) = \\
&\approx U(x)\psi(x) + (\partial_\mu U)\psi(x)dx^\mu + U(x)(\partial_\mu \psi)dx^\mu + i\left[i(\partial_\mu U)U^{-1} + U\Gamma_\mu U^{-1}\right]U\psi(x)dx^\mu = \\
&= U(x)\psi(x) + U(x)(\partial_\mu \psi)dx^\mu + iU(x)\Gamma_\mu \psi(x) dx^\mu
\end{aligned}$$

Eq. 2-7

3. Simmetria e campi bosonici

La derivata covariante differisce dunque dalla derivata ordinaria mediante un termine “di connessione” che dipende dal gruppo di simmetria. Conviene sviluppare i parametri di connessione mediante i generatori T del gruppo. Per il trasporto parallelo questo equivale ad introdurre tanti campi (bosonici) quanti sono gli *i* generatori del gruppo stesso, in modo che valga:

$$\Gamma_\mu(x) = B^i_\mu(x) T^i$$

Eq. 3-1

Mentre per la simmetria, in generale:

$$U = 1 + i\alpha^i T^i$$

Eq. 3-2

Vogliamo dunque studiare come variano le funzioni i campi B (bosonici) nel caso infinitesimo. A tal proposito, riprendendo la Eq. 2-5:

$$\begin{aligned}
\left(B^i_\mu\right)T^i &= \Gamma'_\mu = i\left(\partial_\mu U\right)U^{-1} + U\Gamma_\mu U^{-1} = \\
&= i\left(i\partial_\mu \alpha^j\right)T^j\left(1 - i\alpha^k T^k\right) + \left(1 + i\alpha^l T^l\right)B^m_\mu T^m\left(1 - i\alpha^n T^n\right) = \\
&\approx -\partial_\mu \alpha^j T^j + B^m_\mu T^m + iB^m_\mu\left(\alpha^l T^l T^m - \alpha^n T^m T^n\right)
\end{aligned}$$

Eq. 3-3

Quindi:

$$\begin{aligned}
\left(B^i_\mu\right)T^i &= B^i_\mu T^i - \partial_\mu \alpha^i T^i - iB^m_\mu \alpha^r\left[T^m, T^r\right] = B^i_\mu T^i - \partial_\mu \alpha^i T^i - iB^m_\mu \alpha^r f^{mri} T^i \\
\left(B^i_\mu\right) &= B^i_\mu - \partial_\mu \alpha^i - iB^m_\mu \alpha^r f^{mri}
\end{aligned}$$

Eq. 3-4

Avendo ricordato delle costanti di struttura del gruppo. I *B* si dicono campi di gauge, e quanto abbiamo dimostrato è che la loro trasformazione non dipende dalla particolare rappresentazione del gruppo di simmetria, ma solo dalla struttura del gruppo stesso. Diremo quindi che la rappresentazione dei campi di gauge è universale: questo ci permette di utilizzare ad esempio diverse rappresentazioni per i diversi tipi di campi di particelle.

4. Correnti conservate di materia e vertici di interazione

La Lagrangiana per i campi di Dirac si scriverà dunque, in termini di derivata covariante:

$$L_D = \overline{\psi}_a \left(i\gamma^\mu D_\mu - m \right) \psi^a$$

Eq. 4-1

In cui lo sviluppo della derivata covariante porta, in aggiunta all'usuale Lagrangiana di fermioni liberi, a più termini di interazione (indicizzati con *i*) per cui la parte fermionica completa della Lagrangiana totale viene a scriversi:

$$L_D = \overline{\psi}_a \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi^a - \overline{\psi}^a B^{[i]}{}_\mu \gamma^\mu T^{[i]a}_{\ \ b} \psi^b$$

Eq. 4-2

D'altro canto, essendo la Lagrangiana invariante sotto l'azione del gruppo SU(N) si può individuare una corrente conservata per ogni generatore del gruppo stesso (qui per evitare confusioni gli indici sui generatori sono indicati tra parentesi):

$$J^{[i]\mu}(x) = -\frac{\partial L}{\partial \psi^a{}_{,\mu}}(x) T^{[i]a}_{\ \ b} \psi^b(x) = \overline{\psi}^a \gamma^\mu T^{[i]a}_{\ \ b} \psi^b$$

Eq. 4-3

Confrontando dunque l'Eq. 4-2 con l'Eq. 4-3 vediamo che la corrente di Noether della materia determina i vertici dell'interazione con i campi bosonici:

$$L_I = B^{[i]}{}_\mu J^{[i]\mu}$$

Eq. 4-4

Spesso conviene riscalare i campi bosonici mettendo in evidenza la costante di accoppiamento (più avanti ne sarà mostrata l'applicazione):

$$B \rightarrow gB$$

Eq. 4-5

5. I campi bosonici

Ci si propone adesso di costruire una Lagrangiana invariante anche per i campi di gauge. Il nuovo elemento di Lagrangiana conseguente descriverà la componente libera di tali bosoni (ovviamente a massa zero, non essendo ancora previsto un meccanismo di introduzione della massa).

Il punto di partenza è osservare che le derivate covarianti non commutano, come si vede dall'applicazione al generico multipletto:

$$
\begin{aligned}
&[D_\mu, D_\nu]\psi = [(\partial_\mu + i\Gamma_\mu)(\partial_\nu + i\Gamma_\nu) - (\partial_\nu + i\Gamma_\nu)(\partial_\mu + i\Gamma_\mu)]\psi = \\
&= [\partial_\mu\partial_\nu + i\Gamma_\mu\partial_\nu + i\partial_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\partial_\mu\psi - i\Gamma_\nu\partial_\mu - i\partial_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu]\psi = \\
&= \left[\underbrace{iB^i_\mu T^i\partial_\nu}_{A1} + \underbrace{i\partial_\mu B^j_\nu T^j}_{B1} - B^k_\mu T^k B^l_\nu T^l \underbrace{- iB^m_\nu T^m\partial_\mu}_{B2} \underbrace{- i\partial_\nu B^n_\mu T^n}_{A2} + B^p_\nu T^p B^q_\mu T^q\right]\psi = \\
&\overset{\partial = \partial\cdot\mathbf{1}_{N\times X}}{=} \left[\underbrace{-i(\partial_\nu B^i_\mu)T^i}_{A1+A2} + \underbrace{i(\partial_\mu B^j_\nu)T^j}_{B1+B2} \underbrace{- B^k_\mu B^l_\nu T^k T^l + B^l_\nu B^k_\mu T^l T^k}_{-B^k_\mu B^l_\nu [T^k, T^l]}\right]\psi = \\
&= i[\partial_\mu B^i_\nu - \partial_\nu B^i_\mu + iB^k_\mu B^l_\nu f^{kli}]T^i\psi
\end{aligned}
$$

Eq. 5-1

Questo ci permette di definire in particolare un insieme di tensori, uno per ogni generatore del gruppo, detti *tensori degli sforzi* o *di Yang-Mills*:

$$
\begin{aligned}
&G^i{}_{\mu\nu} = \partial_\mu B^i_\nu(x) - \partial_\nu B^i_\mu(x) + if^{kli} B^k_\mu B^l_\nu \\
&G_{\mu\nu} = \sum_i G^i{}_{\mu\nu} T^i
\end{aligned}
$$

Eq. 5-2

Vogliamo mostrare che anche questo tensore globale si trasforma in modo covariante:

$$
G'_{\mu\nu} = UG_{\mu\nu}U^{-1}
$$

Eq. 5-3

L'Eq. 5-3 si ricava facilmente dall'Eq. 2-4, applicando due volte la commutatività di *D* rispetto ad *U*:

$$
iG'_{\mu\nu}(U\psi) = [D'_\mu, D'_\nu](U\psi) = U([D_\mu, D_\nu]\psi) = U[D_\mu, D_\nu]\overbrace{U^{-1}U}^{\mathbf{1}}\psi = iUG_{\mu\nu}U^{-1}(U\psi)
$$

Eq. 5-4

A questo punto si può mostrare che una Lagrangiana invariante può essere espressa come:

$$L_B \propto \mathrm{Tr}\left(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right) = \mathrm{Tr}\left(G^i{}_{\mu\nu}T^i G^{j\mu\nu}T^j\right) = G^i{}_{\mu\nu}G^{j\mu\nu}\mathrm{Tr}\left(T^i T^j\right)$$

Eq. 5-5

Scegliendo la normalizzazione:

$$\mathrm{Tr}\left(T^i T^j\right) = \frac{1}{2}\delta^{ij}$$

Eq. 5-6

Si ottiene in definitiva:

$$\mathrm{Tr}\left(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}G^i{}_{\mu\nu}G^{i\mu\nu}$$

Eq. 5-7

6. Il modello YM applicato alla teoria elettrodebole: le simmetrie

L'idea fin qui descritta, introdotta da Yang e Mills nel 1954, rappresenta uno schema generale che storicamente è stato applicato in differenti ambiti, dalla fisica nucleare (isospin) fino alle gauge della teoria elettrodebole. Si tratta dunque di applicare tale schema per rendere ragione delle evidenze sperimentali della fisica dei fenomeni elettrodeboli.

Partiamo dunque da questi, costruendo la Lagrangiana dei leptoni liberi:

$$L_0 = \mathrm{i}\,\overline{\psi}_l \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + i\,\overline{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_1$$

Eq. 6-1

In cui il pedice *l* si riferisce a tutte le possibili famiglie. Poiché *sperimentalmente* si trova che le correnti leptoniche (quindi le interazioni leptoniche, vedi Eq. 4-4) coinvolgono in modo differente campi "sinistri" e "destri", introduciamo i proiettori sinistri e destri:

$$P^{\mathrm{L}} = \frac{1-\gamma_5}{2} \qquad P^{\mathrm{R}} = \frac{1+\gamma_5}{2}$$

Eq. 6-2

Cosicché per ogni campo si ottengono le proiezioni:

$$\psi^L = P^{\mathrm{L}}\psi = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi$$
$$\psi^R = P^{\mathrm{R}}\psi = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi$$

Eq. 6-3

SU(2)$_L$

L'idea introdotta nel modello elettrodebole è quella di formare per il gruppo SU(2) doppietti di particelle sinistre, uno per famiglia leptonica, e singoletti di particelle destre. Scriveremo:

$$\Psi_l^L = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} \quad \overline{\Psi}_l^L = \left(\overline{\psi}_{\nu_l}^L, \overline{\psi}_l^L\right)$$
$$\psi_{\nu_l}^R$$
$$\psi_l^R$$

Eq. 6-4

La Lagrangiana per i campi liberi fermionici può essere dunque riscritta in modo "asimmetrico":

$$L_0 = i\overline{\Psi}_l^L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_l^L + \mathrm{i}\,\overline{\psi}_{\nu_l}^R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\nu_l}^R + \mathrm{i}\,\overline{\psi}_l^R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l^R$$

Eq. 6-5

Questa scelta rende chiara a vista la simmetria per i campi sinistri sia $SU(2)_L$, contrassegnato con il pedice *L* per ricordare che tale gruppo non agisce sulla totalità dei campi, ma solo su una proiezione sinistra. Nella rappresentazione in due dimensioni i generatori sono proporzionali alle matrici di Pauli che soddisfano l'algebra:

$$\left[\frac{\sigma^i}{2},\frac{\sigma^j}{2}\right]=i\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}$$

Eq. 6-6

Applichiamo dunque trasformazioni locali:

$$\Psi_l^L \to \Psi'^L_l = e^{ig\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2}}\Psi_l^L \qquad \overline{\Psi}_l^L \to \overline{\Psi}'^L_l = e^{-ig\alpha^i(x)\frac{\sigma^i}{2}}\Psi_l^L$$

$$\begin{aligned}&\psi_l^R \to \psi'^R_l = \psi_l^R \qquad \overline{\psi}_l^R \to \overline{\psi}'^R_l = \overline{\psi}_l^R\\ &\psi_{\nu_l}^R \to \psi'^R_{\nu_l} = \psi_{\nu_l}^R \qquad \overline{\psi}_{\nu_l}^R \to \overline{\psi}'^R_{\nu_l} = \overline{\psi}_{\nu_l}^R\end{aligned}$$

Eq. 6-7

In cui è stata esplicitata la presenza di una costante fissa *g*, fattore che esprime l'intensità di accoppiamento campi-bosoni. Grazie all'azione di $SU(2)_L$ la Lagrangiana acquista, mediante la derivata covariante, il termine di interazione:

$$L_I=-\frac{1}{2}g\overline{\Psi}_l^L C^{[i]}{}_\mu\gamma^\mu\sigma^{[i]}\Psi_l^L$$

Eq. 6-8

Dove stavolta è stata utilizzata la lettera *C* per denotare i campi bosonici. Se ne riassumono quindi le regole di trasformazione per il caso infinitesimo, avendo esplicitato la costante di accoppiamento *g*:

$$\begin{aligned}&\left(C_\mu^i\right)=C_\mu^i-\partial_\mu\alpha^i-igC_\mu^m\alpha^r f^{mri}=C_\mu^i-\partial_\mu\alpha^i-igC_\mu^m\alpha^r\left(i\varepsilon^{mri}\right)=\\ &=C_\mu^i-\partial_\mu\alpha^i-g\varepsilon^{irm}\alpha^r C_\mu^m\end{aligned}$$

Eq. 6-9

Le tre correnti conservate (correnti di *weak isospin*) sono (i=1,2,3):

$$J^{[i]\mu}_{SU(2)_L}=\frac{1}{2}\overline{\Psi}_l^L\gamma^\mu\sigma^{[i]}\Psi_l^L$$

Eq. 6-10

E le corrispondenti quantità costanti (chiamate *cariche di weak isospin*) sono:

$$I^{[i]}_{SU(2)_L}=J^{[i]0}_{SU(2)_L}=\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}J^{[i]0}=\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\overline{\Psi}_l^L\gamma^0\sigma^{[i]}\Psi_l^L\overset{\left(\gamma^0\right)^2=\mathbf{1}}{=}\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\left(\Psi_l^L\right)^+\sigma^{[i]}\Psi_l^L$$

Eq. 6-11

Per prima cosa osserviamo la forma di $J^{[3]}$:

$$J_{SU(2)_L}^{[3]\mu} = \frac{1}{2}\overline{\Psi}_l^L \gamma^\mu \sigma^{[3]} \Psi_l^L = \frac{1}{2}\overline{\Psi}_l^L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi_l^L = \frac{1}{2}\left[\overline{\psi}_{\nu_l}^L \gamma^\mu \psi_{\nu_l}^L - \overline{\psi}_l^L \gamma^\mu \psi_l^L\right]$$

Eq. 6-12

Trattasi chiaramente di corrente *elettricamente neutra* perché accoppia particelle o entrambe neutre (neutrini) o entrambe cariche (leptoni). Inoltre avendo:

$$\sigma^{[3]}\Psi_l^L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ -\psi_l^L \end{pmatrix}$$

Eq. 6-13

Per due stati definiti di singola particella si hanno le due cariche:

$$I_{SU(2)_L}^{[3]}\left|\nu_l^L\right\rangle = \frac{1}{2}\left|\nu_l^L\right\rangle$$
$$I_{SU(2)_L}^{[3]}\left|l^L\right\rangle = -\frac{1}{2}\left|l_l^L\right\rangle$$

Eq. 6-14

Mentre nel modello gli stati destri sono scalari relativamente all'isospin debole (sono *isoscalari*), ossia si sceglie per $SU(2)_R$ una rappresentazione di dimensionalità 1.

È evidente che $I^{[3]}$ non può essere la carica elettrica, in quanto esprime un valore non nullo per il neutrino e comunque non emerge da una simmetria SU(2): è chiamata *carica di isospin debole*. Per questo la corrente di *carica di isospin debole* non deve essere confusa con un'altra corrente elettricamente neutra, ossia quella elettromagnetica pura, data dall'invarianza dei leptoni per trasformazione di fase:

$$J_{EM}^\mu = -e\overline{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l$$

Eq. 6-15

Quest'ultima porta alla conservazione della carica elettrica:

$$Q = \int d^3\mathbf{x} J_{EM}^0 = -e\int d^3\mathbf{x}\overline{\psi}_l \gamma^0 \psi_l = -e\int d^3\mathbf{x}\psi_l^+ \psi_l$$

Eq. 6-16

Possiamo ottenere una nuova corrente conservata combinando le due correnti precedenti:

$$J_Y^\mu = \frac{J_{EM}^\mu}{e} - J_{SU(2)_L}^{[3]\mu}$$

Eq. 6-17

Ottenendo una nuova quantità conservata, detta *ipercarica*:

$$Y=\frac{Q}{e}-I_{SU(2)_L}^{[i]}=\int d^3\mathbf{x}\left\{-\overline{\psi}_l\,\gamma^0\psi_l-\frac{1}{2}\left[\overline{\psi}_{\nu_l}^L\gamma^0\psi_{\nu_l}^L-\overline{\psi}_l^L\gamma^0\psi_l^L\right]\right\}=$$
$$=\int d^3\mathbf{x}\left\{-\frac{1}{2}\overline{\psi}_l^L\gamma^0\psi_l^L-\overline{\psi}_l^R\gamma^0\psi_l^R-\frac{1}{2}\overline{\psi}_{\nu_l}^L\gamma^0\psi_{\nu_l}^L\right\}=\int d^3\mathbf{x}\left\{-\frac{1}{2}\overline{\Psi}_l^L\gamma^0\Psi_l^L-\overline{\psi}_l^R\gamma^0\psi_l^R\right\}$$

Eq. 6-18

Per quanto visto l'ipercarica assume un valore differente per i vari multipletti (doppietto sinistro di isospin, singoletto leptonico destro, singoletto neutrinico destro):

$$Y=\begin{cases}-\frac{1}{2} & \text{per } \Psi_l^L\\ -1 & \text{per } \psi_l^R\\ 0 & \text{per } \psi_{\nu_l}^R\end{cases}$$

Eq. 6-19

In questo schema emerge chiaramente che il neutrino destro ha carica elettrodebole nulla: pertanto è immune a questo tipo di interazioni. Conviene per futura utilità rimescolare le correnti restanti in questo modo:

$$J_{SU(2)_L}^{\mu}=J_{SU(2)_L}^{[1]\mu}-iJ_{SU(2)_L}^{[2]\mu}$$
$$J_{SU(2)_L}^{\mu^+}=J_{SU(2)_L}^{[1]\mu}+iJ_{SU(2)_L}^{[2]\mu}$$

Eq. 6-20

U(1)$_Y$

Il gruppo U(1) si dice di ipercarica perché è proprio *Y* la quantità che vogliamo ricavare come la costante ottenuta dalla conservazione della corrente generata da questa simmetria. Per fare ciò come già visto si deve avere che:

$$J_{U(1)_Y}^{\mu}=-\frac{1}{2}\overline{\Psi}_l^L\gamma^\mu\Psi_l^L-\overline{\psi}_l^R\gamma^\mu\psi_l^R$$

Eq. 6-21

Cosa che si ottiene con la trasformazione locale di fase:

$$\psi\to\psi'=e^{ig'Y\xi(x)}\psi$$

Eq. 6-22

In cui compare una nuova costante di accoppiamento (*g'*) ed intendiamo mettere in evidenza proprio l'ipercarica *Y*. Allora:

$$\Gamma_\mu(x)=g'YB_\mu(x)$$
$$D_\mu=\partial_\mu+ig'YB_\mu(x)$$

Eq. 6-23

Possedendo la trasformazione di fase un unico generatore, il bosone di interazione è unico e in assenza di commutatori e costanti di struttura la sua legge di trasformazione è ricavata dalla semplificazione dell'Eq. 3-4:

$$B'_{\mu} = B_{\mu} - \partial_{\mu}\xi$$

Eq. 6-24

Mentre le derivate covarianti sono differenti per ciascuno dei multipletti:

$$\begin{aligned} D_{\mu}\Psi_{l}^{L} &= \left[\partial_{\mu} - \frac{1}{2}ig' B_{\mu}(x)\right]\Psi_{l}^{L} \\ D_{\mu}\psi_{l}^{R} &= \left[\partial_{\mu} - ig' B_{\mu}(x)\right]\psi_{l}^{R} \\ D_{\mu}\psi_{\nu_l}^{R} &= \left[\partial_{\mu}\right]\psi_{\nu_l}^{R} \end{aligned}$$

Eq. 6-25

7. Il modello YM applicato alla teoria elettrodebole: i bosoni fisici

Per quanto detto fin qui la Lagrangiana di interazione è data da:

$$L_I = -gJ^{[i]\mu}_{SU(2)_L}(x)C^{[i]}_{\mu}(x) - g' J^{\mu}_{U(1)_Y}(x)B_{\mu}(x)$$

Eq. 7-1

I campi bosonici C e B non sono però quelli osservati in natura. Per identificare bosoni "noti" si deve procedere ad un rimescolamento (in generale non Hermitiano!):

$$\begin{aligned} W_{\mu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[C^{[1]}_{\mu}(x) - iC^{[2]}_{\mu}(x)\right] \\ W^{+}_{\mu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[C^{[1]}_{\mu}(x) + iC^{[2]}_{\mu}(x)\right] \\ Z_{\mu}(x) &= \cos\theta_W C^{[3]}_{\mu}(x) - \sin\theta_W B_{\mu}(x) \\ A_{\mu}(x) &= \sin\theta_W C^{[3]}_{\mu}(x) + \cos\theta_W B_{\mu}(x) \end{aligned}$$

Eq. 7-2

In cui è stata introdotta per gli ultimi due campi bosonici una sorta di rotazione nota come "rotazione di Weinberg", parametrizzata dall'omonimo angolo. In tal modo la Lagrangiana di interazione diventa:

$$L_I = -\frac{g}{2\sqrt{2}}\overbrace{\left[J^{\mu^+}_{SU(2)_L}(x)W_\mu(x) + J^{\mu}_{SU(2)_L}(x)W^+_\mu(x)\right]}^{\sum_{i=1}^{2} J^{[i]\mu}_{SU(2)_L}(x)C^{[i]}{}_\mu(x)} +$$
$$-gJ^{[3]\mu}_{SU(2)_L}\overbrace{\left[\cos\theta_W Z_\mu(x) + \sin\theta_W A_\mu(x)\right]}^{C^{[3]}_\mu(x)} +$$
$$-g'\overbrace{\left(\frac{J^\mu_{EM}}{e} - J^{[3]\mu}_{SU(2)_L}\right)}^{J^\mu_{U(1)_Y}}\overbrace{\left[-\sin\theta_W Z_\mu(x) + \cos\theta_W A_\mu(x)\right]}^{B_\mu(x)}$$

Eq. 7-3

Se vogliamo che il campo *A* rappresenti proprio il campo elettromagnetico, questo deve essere accoppiato alle cariche elettriche in modo usuale:

$$L_{I_{EM}} = -J^\mu_{EM}\ A_\mu(x)$$

Eq. 7-4

In particolare, isolando i termini di interazione:

$$-gJ^{[3]\mu}_{SU(2)_L}\sin\theta_W A_\mu(x) - g'\frac{J^\mu_{EM}}{e}\cos\theta_W A_\mu(x) + g'\cos\theta_W J^{[3]\mu}_{SU(2)_L} A_\mu(x) = -J^\mu_{EM}\ A_\mu(x)$$
$$\Leftrightarrow g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W \quad g'\cos\theta_W = e$$

Eq. 7-5

Definendo:

$$\frac{g}{2\sqrt{2}} = g_W$$

Eq. 7-6

L'espressione finale per la Lagrangiana di interazione è quindi:

$$L_I = -J^\mu_{EM}\ A_\mu(x) - g_W\left[J^{\mu^+}_{SU(2)_L}(x)W_\mu(x) + J^{\mu}_{SU(2)_L}(x)W^+_\mu(x)\right] +$$
$$-\frac{g}{\cos\theta_W}\left[J^{[3]\mu}_{SU(2)_L} - \sin^2\theta_W\frac{J^\mu_{EM}}{e}\right]Z_\mu(x)$$

Eq. 7-7

Si riporta per completezza anche lo sviluppo di:

$$J^{[3]\mu}_{SU(2)_L} - \sin^2\theta_W \frac{J^{\mu}_{EM}}{e} = \frac{1}{4}\left[\overline{\psi}_{\nu_l}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\psi_{\nu_l} - \overline{\psi}_l\,\gamma^{\mu}\left[\left(1-4\sin^2\theta_W\right)-\gamma^5\right]\psi_l\,\right]$$

Eq. 7-8

Notiamo che per valori nulli dell'angolo di Weinberg le interazioni elettromagnetiche e quelle deboli risultano disaccoppiate, cosa non verificata sperimentalmente. L'accordo migliore tra teoria ed esperimento si ottiene infatti per:

$$\sin^2\theta_W = 0.233 \pm 0.001$$

Eq. 7-9

Referenze

[1] L. Maiani, "Interazioni elettrodeboli", Editori Riuniti, 2013

[2] F. Mandl, G. Shaw, "Quantum field theory", Wiley & Sons, 1984, Chap. 12 App. 12.6.2