Tensori, prodotti esterni, trasformata di Hodge

Luca Alfinito, febbraio 2020

1. Spazi vettoriali e spazi duali

Si dice che uno spazio vettoriale definito su dato corpo (per noi, **R**) ha dimensione n se ogni vettore x può essere scritto in modo univoco come combinazione lineare degli n elementi di una certa base.

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$$

Eq. 1-1

Questo comporta un evidente isomorfismo:

$$\mathrm{V} \xrightarrow{\cong} \Re^n$$

Eq. 1-2

Difatti ad ogni *x* possiamo associare gli *n* coefficienti dello sviluppo nella data base:

$$x \in \mathrm{V} \rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix} \in \Re^n$$

Eq. 1-3

Fin qui tutto dovrebbe essere privo di difficoltà. Per spazio duale (algebrico) V^* si intende lo spazio della applicazioni lineari da V a R:

$$\mathrm{V}^* \ni \mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V}, \Re) = \{g : \mathrm{V} \rightarrow \Re, \mathrm{lineare}\}$$

Eq. 1-4

Per la linearità:

$$g(x) = g(x^i e_i) = x^i g(e_i) = x^i g_i$$

Eq. 1-5

Quindi ovviamente basta conoscere come *g* opera sugli elementi della base per avere informazioni sulla mappatura di tutto lo spazio vettoriale.

Data la base e_i, *g* si può rappresentare come un'applicazione lineare con una matrice di una sola riga:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(e_1) & \cdots & g(e_n) \end{pmatrix}$$

Eq. 1-6

Questo comporta la definizione di una base $\{\omega^i\}$di *g*:

$$g = g_i \omega^i \qquad\qquad \omega^i(e_j) = \delta^i_j$$

Eq. 1-7

In questo modo:

$$\omega^j(x) = x^j$$

Eq. 1-8

Possiamo quindi identificare ogni applicazione dello spazio duale come un accoppiamento che ha l'aspetto di un prodotto scalare:

$$g(x) = \langle g | x \rangle = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ . \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix} = g_1 x^1 + \ldots + g_n x^n$$

Eq. 1-9

2. Prodotto tensoriale

Consideriamo per prima cosa due spazi vettoriali V e W di dimensione rispettiva *n* ed *m* e lo spazio degli omomorfismi lineari da V a W.

$$\mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) = \{a : \mathrm{V} \to \mathrm{W}, \mathrm{lineare}\}$$

Eq. 2-1

Sia $\{f_j\}$ una base di W. L'applicazione *a* è completamente descritta da una matrice a^i_j:

$$a(x) = a\left(\sum^n x^j e_j\right) = \sum_j^n x^j a(e_j) = \sum_{j,i} x^j a^i_j f_i$$

Eq. 2-2

Dove abbiamo posto:

$$a(e_j) = \sum_i^m a^i_j f_i$$

Eq. 2-3

Riscrivendo la componente x^j mediante la relazione $\omega^j(x) = x^j$:

$$a(x)=\sum_{j,i} a_j^i f_i \omega^j(x)$$

Eq. 2-4

Quindi a sua volta la *a* è una combinazione lineare delle applicazioni lineari di questo tipo:

$x \to f_i \omega^j(x)$, al variare di *i* e *j*.

Eq. 2-5

Capiamo quindi che gli $f_i \omega^j$ sono oggetti multilineari che trasformano i vettori dello spazio V in vettori dello spazio W. Per renderci conto di quanto scritto è sufficiente considerare l'esempio in cui entrambi gli spazi sono in due dimensioni:

$$x \to Ax = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \left[a_1^1 \underset{\substack{\uparrow \\ f_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega^1}}{(1 \quad 0)} + a_2^1 \underset{\substack{\uparrow \\ f_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega^2}}{(0 \quad 1)} + a_1^2 \underset{\substack{\uparrow \\ f_2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega^1}}{(1 \quad 0)} + a_2^2 \underset{\substack{\uparrow \\ f_2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ \omega^2}}{(0 \quad 1)} \right]\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \left[a_1^1 \begin{pmatrix} 1\cdot(1 \quad 0) \\ 0\cdot(1 \quad 0) \end{pmatrix} + a_2^1 \begin{pmatrix} 1\cdot(0 \quad 1) \\ 0\cdot(0 \quad 1) \end{pmatrix} + a_1^2 \begin{pmatrix} 0\cdot(1 \quad 0) \\ 1\cdot(1 \quad 0) \end{pmatrix} + a_2^2 \begin{pmatrix} 0\cdot(0 \quad 1) \\ 1\cdot(0 \quad 1) \end{pmatrix} \right]\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \left[a_1^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Eq. 2-6

Possiamo quindi dire che lo spazio delle applicazioni lineari da V a W è isomorfo ad un certo tipo di prodotto tra gli spazi V* e W:

$$\mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V},\mathrm{W}) \cong \mathrm{V}^* \overset{?}{\times} \mathrm{W}$$

Eq. 2-7

Dove abbiamo scritto il punto interrogativo perché dobbiamo approfondire la natura di questo prodotto. Possiamo scrivere esplicitamente l'isomorfismo introducendo la seguente mappatura:

$$F : \mathrm{V}^* \overset{?}{\times} \mathrm{W} \to \mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V},\mathrm{W})$$
$$\omega \overset{?}{\times} w \to F_{\omega \overset{?}{\times} w} : v \to \omega(v) w$$

Eq. 2-8

Tale mappatura (lineare per costruzione) è iniettiva.

Consideriamo adesso lo spazio vettoriale F(V,W) che ha per base tutte le coppie (inserendo l'indice *i* si intendono "contare" gli infiniti addendi, anche se formalmente non numerabili):

$$(v_i, w_i) \in \mathrm{V} \times \mathrm{W}$$

Eq. 2-9

Evidentemente se le dimensioni di entrambi gli spazi sono non nulle, ogni coppia ha la sua “dignità”, e lo spazio ha dimensione infinita. Vogliamo allora individuare lo spazio di dimensione minima in cui valgano le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
&(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\
&v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\
&k(v \otimes w) = (kv) \otimes w = v \otimes (kw)
\end{aligned}$$

Eq. 2-10

Per far questo dobbiamo far uso delle proprietà degli spazi vettoriali quozienti. Ricordiamo che, dato uno spazio T ed un sottospazio U, due vettori z_1 e z_2 sono equivalenti se:

$$z_1 \equiv z_2 := \bar{z}_1 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 \in U$$

Eq. 2-11

Dove la barra indica il “rappresentativo” della classe di equivalenza. Costruiamo allora un sottospazio R(V,W) generato dai seguenti elementi di F(V,W):

$$\begin{aligned}
&(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) + (v_2, w) \\
&(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) + (v, w_2) \\
&k(v, w) - (kv, w) \\
&k(v, w) - (v, kw)
\end{aligned}$$

Eq. 2-12

Proviamo a definire il prodotto tensoriale come spazio quoziente:

$$\mathrm{V} \otimes \mathrm{W} := F(\mathrm{V}, \mathrm{W}) / \mathrm{R}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$$

Eq. 2-13

Ossia per ogni elemento *t* dello spazio tensoriale si ha che può essere scritto come:

$$\mathrm{t} \in \mathrm{V} \otimes \mathrm{W} := f + \mathrm{R}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$$

Eq. 2-14

Per un certo *f* che sarà dunque il rappresentativo della classe di equivalenza di cui t fa parte. Di conseguenza:

$$v \otimes w = \overline{(v, w)} = (v, w) + \mathrm{R}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$$

Eq. 2-15

Vediamo dunque che in virtù di questa definizione:

$$
\begin{aligned}
&(v_1+v_2)\otimes w - v_1\otimes w - v_2\otimes w = \overline{0}\\
&v\otimes(w_1+w_2) - v\otimes w_1 - v\otimes w_2 = \overline{0}\\
&k(v\otimes w)-(kv)\otimes w = \overline{0}\\
&k(v\otimes w)-v\otimes(kw) = \overline{0}
\end{aligned}
$$

Eq. 2-16

Ricordando che un elemento appartiene alla classe di *0* solo se appartiene a R(V,W). Scriviamo la dimostrazione ad esempio della prima:

$$
\begin{aligned}
\overline{0} &= \overline{(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)}\\
&= \overline{(v_1+v_2,w)}-\overline{(v_1,w)}-\overline{(v_2,w)}\\
&= (v_1+v_2)\otimes w-(v_1\otimes w)-(v_2\otimes w),
\end{aligned}
$$

Eq. 2-17

Una proprietà universale del prodotto tensoriale vuole che se B è l'applicazione che mappa il prodotto semplice in prodotto tensoriale, allora per ogni spazio reale U di dimensione finita e per ogni applicazione lineare dal prodotto ad U si ha un'unica applicazione lineare Φ che rende commutativo il diagramma:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{V}\times\mathrm{W} & \xrightarrow{B} & \mathrm{V}\otimes\mathrm{W}\\
\phi\downarrow & & \Phi\\
\mathrm{U} & & \swarrow
\end{array}
$$

$$
\phi = \Phi\circ B
$$

Eq. 2-18

Questa proprietà ci fa comodo proprio per osservare che quel prodotto "misterioso" era proprio il prodotto tensoriale, considerando l'applicazione:

$$
\phi : \mathrm{V}^*\times\mathrm{W}\to \mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V},\mathrm{W})
$$

$$
(\omega,w)\to[x\mapsto\omega(x)w]
$$

Eq. 2-19

Perciò otteniamo un'applicazione lineare che è un isomorfismo (è iniettiva e le dimensioni dei due spazi sono identiche):

$$
\begin{aligned}
&\Phi : \mathrm{V}^*\otimes\mathrm{W}\to \mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V},\mathrm{W})\\
&\omega\otimes w\to[x\mapsto\omega(x)w]
\end{aligned}
$$

Eq. 2-20

Ovviamente questo definisce una ricetta per costruire tensori più complessi, attraverso la composizione di prodotti tensoriali di più vettori e 1-forme (distinti solo dalla posizione dei pertinenti indici).

3. Prodotto esterno

Dato il solito spazio vettoriale reale di dimensione *n*, per cominciare definiamo il sottospazio I_2:

$$\mathrm{V}\otimes\mathrm{V}\supset I_2 := \{v\otimes v : v\in\mathrm{V}\}$$

Eq. 3-1

Dati due vettori di V:

$$(u+v)\otimes(u+v)=u\otimes u+u\otimes v+v\otimes u+v\otimes v$$

Eq. 3-2

Quindi si deve avere che:

$$u\otimes v+v\otimes u=(u+v)\otimes(u+v)-u\otimes u-v\otimes v\in I_2$$

Eq. 3-3

Il prodotto esterno è allora definito come lo spazio quoziente:

$$\Lambda^2\mathrm{V}:=\mathrm{V}\otimes\mathrm{V}/I_2$$

Eq. 3-4

Ossia, dati due vettori:

$$u\wedge v=\overline{u\otimes v}+I_2$$

Eq. 3-5

Ovviamente tutti i vettori che appartengono al sottospazio I_2 sono rappresentati dalla classe 0. Tra cui come già mostrato:

$$u\wedge v+v\wedge u=\overline{u\otimes v+v\otimes u}+I_2=0$$

Eq. 3-6

In relazione a quanto presentato valgono quindi le seguenti regole:

$$\begin{aligned}&u\wedge v=-v\wedge u\\&u\wedge u=0\end{aligned}$$

Eq. 3-7

Si può quindi generalizzare al *k*-esimo prodotto esterno nel seguente modo induttivo:

$$I_k:=(I_{k-1}\otimes\mathrm{V})\oplus(\mathrm{V}\otimes I_{k-1})$$

Eq. 3-8

Vediamo ad esempio che per *k*=3:

$$I_3 = \{u \otimes u \otimes \mathrm{v}, \mathrm{v} \otimes u \otimes u : u, v \in \mathrm{V}\}$$

Eq. 3-9

Definiamo quindi ancora una volta il quoziente[1]:

$$\Lambda^k \mathrm{V} := \mathrm{V}^{\otimes \mathrm{k}} / I_k$$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = \overline{v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k} + I_k$$

Eq. 3-10

Si può dimostrare allora che se si ha un tensore puro $t = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$ in cui compare almeno un prodotto tensoriale di due vettori uguali per un dato *i* si ha allora ovviamente:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots v_i \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k = 0$$

Eq. 3-11

E ancora:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots v_i \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_k = -v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots v_{i+1} \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_k$$

Eq. 3-12

Ogni trasposizione cambia il segno del risultato. Dal momento che qualsiasi permutazione è una combinazione di trasposizioni, si può generalizzare ricordando il significato di segno *ε* della permutazione:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots v_i \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_k = \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge v_{\sigma(2)} \wedge \cdots v_{\sigma(i)} \wedge v_{\sigma(i+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)}$$

Eq. 3-13

Definendo multilineare *alternante* un'applicazione tale che:

$$\phi : V^k \to \Re \quad \phi(v_1, \cdots, v_i, \ldots, v_k) = \varepsilon(\sigma) \phi\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(i)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right)$$

Eq. 3-14

diremo allora che applicazioni multilineari in *k* variabili definiscono applicazioni $\wedge^k V \to \Re$, una base di $\wedge^k V$ essendo data da:

$$\varepsilon_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \qquad \text{dove} \qquad I = \{i_1, \ldots i_k\} \subset \{1, \ldots n\}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_k$$

Eq. 3-15

Ovviamente dato un particolare *k* si ha che la dimensione dello spazio esterno è il numero di possibili scelte di *k* valori degli indici sugli *n* possibili totali:

---

1 Più in generale si può definire un'algebra sul prodotto esterno:

$$I = I_2 \oplus I_3 \oplus \ldots \oplus I_k \oplus \ldots = \oplus_{i=2}^{\infty} I_i$$
$$\wedge V := T(V) / I = \Re \oplus V \oplus \wedge^2 V \oplus \ldots \oplus \wedge^n V$$

$$\mathrm{Dim} \wedge^k V = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad k \le n$$

Eq. 3-16

Se ora $\mathrm{Dim} V = n$, sfruttando il fatto che il determinante di una matrice $n \times n$ è lineare in ogni colonna ed è una funzione alternante si ha:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n = \det(v_1, v_2, \cdots, v_n) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$$

Eq. 3-17

4. L'operatore di Hodge

Forniamo una delle definizioni possibili dell'operatore di Hodge.

Siano:

V uno spazio vettoriale orientato di dimensione *n* e dotato di un prodotto scalare (,)

$e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormale di V

Un insieme di indici $I = \{i_1, \ldots i_k\}$ e un insieme di indici $J = \{j_1, \ldots j_{n-k}\}$ con $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$

$\varepsilon_{I,J}$ tale che:

$$\varepsilon_{I,J}(e_I \wedge e_J) = \varepsilon_{I,J}(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}) \wedge (e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-k}}) = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Eq. 4-1

(per il momento stiamo considerando per ε una posizione generica degli indici). L'operatore di Hodge è allora definito come un'applicazione lineare (che si può mostrare essere un isomorfismo):

$$* : \wedge^k \mathrm{V} \to \wedge^{n-k} \mathrm{V} \qquad \text{con} \qquad * e_I = \varepsilon_{I,J} e_J$$

Eq. 4-2

Nello spazio tridimensionale si dimostra facilmente che:

$$\begin{aligned} *(e_1 \wedge e_2) &= e_3 \\ *(e_1 \wedge e_3) &= -e_2 \\ *(e_2 \wedge e_3) &= e_1 \end{aligned}$$

Eq. 4-3

Dimostrazione. Chiaramente:

$$\varepsilon_{\{1,2\},\{3\}} = 1$$

Eq. 4-4

Per quanto invece riguarda la seconda:

$$e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \text{, cioè: } \varepsilon_{\{1,3\},\{2\}} = -1$$

Eq. 4-5

È parimenti banale osservare che:

$$*\left(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\right) = 1$$

Eq. 4-6

Un'ultima osservazione. Consideriamo il trasformato di Hodge del prodotto esterno tra due vettori:

$$*\left(a \wedge b\right) = a^i b^j * \left(e_i \wedge e_j\right) = a^i b^j \varepsilon_{ijk} e_k = \vec{a} \times \vec{b}$$

Eq. 4-7

Dove si riconosce l'usuale prodotto vettoriale (dimensionalità 1).

5. Tracce ed elementi di Casimir

Consideriamo per uno spazio di dimensione *n* l'accoppiamento di dualità:

$$\mathrm{V}^* \times \mathrm{V} \ni (\omega, x) \to \langle \omega | x \rangle \in \Re$$

Eq. 5-1

In quanto applicazione bilineare definisce in modo univoco un'applicazione lineare, denominata *contrazione*:

$$C : \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V} \to \Re$$

Eq. 5-2

Tale applicazione "vive" nel duale di $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}$ (ossia in $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^*$), ed è chiamato elemento di Casimir, che dimostriamo essere dato da:

$$c = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i$$

Eq. 5-3

Infatti si ha ovviamente che:

$$c(\omega, x) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i \middle| \omega_j e^j \otimes x^k e_k \right\rangle = \omega_i v^i = \langle \omega | x \rangle$$

Eq. 5-4

Che è coerente con la definizione dell'elemento di Casimir. Se adesso A è un omomorfismo di V in se stesso, ricordando che $\mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V}, \mathrm{V}) \cong \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}$ si può allora definire la traccia come l'applicazione dell'elemento di Casimir su A, senza appesantire la notazione:

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V}, \mathrm{V}) \ni \mathrm{A} = c(\mathrm{A}) = \langle c | \mathrm{A} \rangle$$

Eq. 5-5

Mostriamo che la Traccia è invariante sotto l'azione aggiunta del gruppo lineare:

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{gAg}^{-1}\right)=\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) \quad \forall g \in GL_{\Re}(\mathrm{V})$$

Eq. 5-6

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}:\mathrm{V}\ni u \to \langle \omega | u \rangle x \in \mathrm{V}\\&\mathrm{gAg}^{-1}:\mathrm{V}\ni u \to \langle \omega | g^{-1}u \rangle g(x)=\left\langle \left(g^{-1}\right)^{t}\omega \middle| u \right\rangle g(x)\end{aligned}$$

Eq. 5-7

Quindi a gAg^{-1} corrisponde in $\mathrm{V}^{*}\otimes\mathrm{V}$ il tensore $\left(g^{-1}\right)^{t}\omega\otimes g(x)$. Abbiamo quindi, come si voleva dimostrare:

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{gAg}^{-1}\right)=\left\langle c \middle| \mathrm{gAg}^{-1}\right\rangle \overset{\text{Definizione di Casimir}}{=} \left\langle \left(g^{-1}\right)^{t}\omega \middle| g(x)\right\rangle=\left\langle \omega \middle| g^{-1}g(x)\right\rangle=\langle \omega | x\rangle=\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$$

Eq. 5-8

Per definire tutti gli invarianti di Casimir legati ad un'applicazione è utile il seguente teorema, che non dimostriamo (una dimostrazione risiede in [3], pag. 232).

Se V e W sono spazi vettoriali di dimensione finita su un dato campo, e:

$$\mathrm{A}\in \mathrm{Hom}_{\Re}(\mathrm{V},\mathrm{W})$$

Eq. 5-9

Allora per ogni intero positivo risulta determinata un'unica applicazione lineare:

$$\begin{aligned}&\wedge^{\mathrm{m}}\mathrm{A}:\wedge^{\mathrm{m}}\mathrm{V}\to\wedge^{\mathrm{m}}\mathrm{W} \quad \text{tale che}\\&\left(\wedge^{\mathrm{m}}\mathrm{A}\right)\left(\mathbf{v}_{(1)}\wedge\ldots\wedge\mathbf{v}_{(m)}\right)=\left(\mathrm{A}\mathbf{v}_{(1)}\right)\wedge\ldots\wedge\mathrm{A}\left(\mathbf{v}_{(m)}\right)\end{aligned}$$

Eq. 5-10

Se in particolare A è un endomorfismo lineare su V di dimensione finita *n*, tutti gli spazi $\Lambda^{m}(\mathrm{V})$ sono parimenti di dimensione finita diversa da 0 se $m \leq n$ ed è possibile definire gli *n* invarianti scalari:

$$\begin{aligned}&\Delta_1(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}(\mathrm{A})\\&\Delta_2(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}\left(\wedge^{2}\mathrm{A}\right)\\&\Delta_3(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}\left(\wedge^{3}\mathrm{A}\right)\\&\ldots\\&\Delta_n(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}\left(\wedge^{\mathrm{n}}\mathrm{A}\right)\end{aligned}$$

Eq. 5-11

In particolare si ha che:

$$\Delta_n(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}\left(\wedge^{\mathrm{n}}\mathrm{A}\right)=\det\mathrm{A}$$

Eq. 5-12

ed è l'unico scalare per cui:

$$\left(\mathrm{A}\mathbf{v}_{(1)}\right)\wedge\ldots\wedge\mathrm{A}\left(\mathbf{v}_{(n)}\right)=\left(\Delta_n(\mathrm{A})\right)\left(\mathbf{v}_{(1)}\wedge\ldots\wedge\mathbf{v}_{(n)}\right)$$

Eq. 5-13

6. Le *p*-forme e la derivata esterna

Per *1-forme* si intendono gli elementi dello spazio duale, per le quali si può dare una base:

$$\omega^j=\mathbf{e}^j=\mathbf{d}x^j$$

Eq. 6-1

Una *p-forma* è un tensore completamente antisimmetrico del tipo:

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{p!}\alpha_{i_1i_2\ldots i_p}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}\equiv\alpha_{|i_1i_2\ldots i_p|}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}$$

Eq. 6-2

In cui le barre indicano che la somma si estende su indici crescenti da i_1 a i_p. Si può anche vedere che:

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{p!}\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_p}\alpha_{i_1i_2\ldots i_p}\boldsymbol{\omega}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{\omega}^{i_p}$$

Eq. 6-3

In cui riconosciamo l'elemento completamente antisimmetrico di Ricci (non tensore, in questa forma).

Si mostra inoltre che tra una *p-forma* e una *q-forma* sussiste questa regola di commutazione:

$$\underset{p}{\boldsymbol{\alpha}}\wedge\underset{q}{\boldsymbol{\beta}}=(-1)^{pq}\underset{q}{\boldsymbol{\beta}}\wedge\underset{p}{\boldsymbol{\alpha}}$$

Eq. 6-4

La dimostrazione dipende dal fatto che come è noto il prodotto esterno cambia segno ad ogni trasposizione, e la permutazione che riordina le due forme nel modo a destra dell'uguale è costruita da un numero di trasposizioni pari al prodotto *pq*.

Introdurremo per brevità la notazione per indicare l'insieme di indici:

$$I=\left(i_1\,i_2\ldots i_p\right),\quad 1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n$$

Eq. 6-5

La generica *p*-forma sarà allora scrivibile:

$$\boldsymbol{\alpha}=\alpha_I\boldsymbol{\omega}^I=\alpha_{|i_1i_2\ldots i_p|}\mathbf{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{d}x^{i_p}$$

Eq. 6-6

Allora possiamo costruire una *p+1* forma differenziale, detta derivata esterna ***dα***:

$$\mathbf{d\alpha} = \mathbf{d}\alpha_{|i_1 i_2 \dots i_p|} \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p} = \alpha_{I,k}\mathbf{d}x^k \wedge \boldsymbol{\omega}^I = \alpha_{|i_1 i_2 \dots i_p|,k}\mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}$$

Eq. 6-7

Quindi in generale data la generica:

$$\boldsymbol{\omega} = f_I \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}$$

Eq. 6-8

Allora la f_I è interpretata come una *0-forma*, a cui si possono applicare le proprietà della derivata esterna. Quindi:

$$\mathbf{d\omega} = f_{I,k}\mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}$$

Eq. 6-9

Osserviamo che:

$$\mathbf{dd\omega} = 0$$

Eq. 6-10

Infatti:

$$\begin{aligned}\mathbf{dd\omega} &= f_{I,km}\mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p} \overset{\text{trasposizione}}{=} -f_{I,km}\mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p} = \\ &\overset{\text{proprietà derivata seconda}}{=} -f_{I,mk}\mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p} \overset{k \leftrightarrow m}{=} -f_{I,km}\mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p} = 0\end{aligned}$$

Eq. 6-11

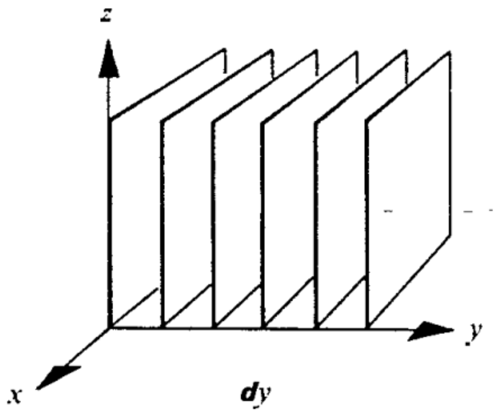
Ultimo aspetto da presentare. Per quanto riguarda la contrazione di una *p*-forma con un *p*-vettore (ossia: l'analogo vettoriale della *p*-forma) abbiamo:

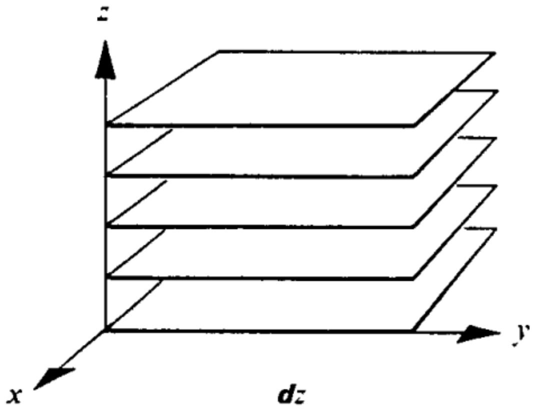
$$\left\langle \underset{p}{\boldsymbol{\alpha}}, \underset{p}{\mathbf{A}} \right\rangle = \alpha_{|i_1 i_2 \dots i_p|} A^{|j_1 j_2 \dots j_p|} \left\langle \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}, \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_p} \right\rangle = \alpha_{|i_1 i_2 \dots i_p|} A^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

Eq. 6-12

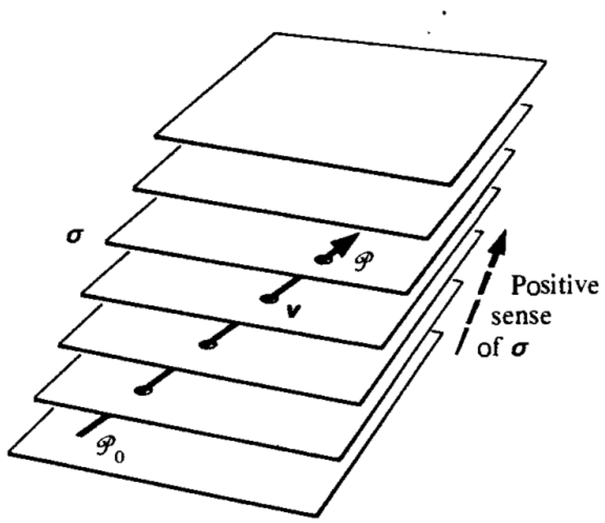
7. Interpretazione pittorica delle *p-forme*

Ecco come Wheeler [4] ci rappresenta la 1-forma (vedi pag. 100):





Così l'accoppiamento <***σ***,***v***> (contrazione di una 1-forma con un vettore) restituisce il numero di "*bongs of the bell*", ossia ci dà l'idea di quante superfici ***σ*** vengono perforate dal vettore ***v*** (vedi pag. 55).



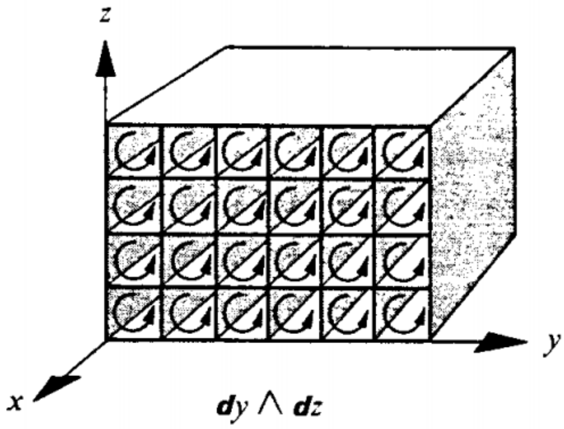
Così che l'interpretazione pittorica dell'integrale di una 1-forma lungo una curva specifica:

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{\sigma}$$

Eq. 7-1

è il "numero di **σ**-superfici perforate dalla traiettoria ***ϒ*** (Box 4.1 lettera C, pagina 94).

Proseguendo, la costruzione della 2-forma da **d**y e **d**z dà la struttura alveolare ("**honey-comb**") con un preciso senso di circolazione, indicato dalle frecce (ancora pag. 100):

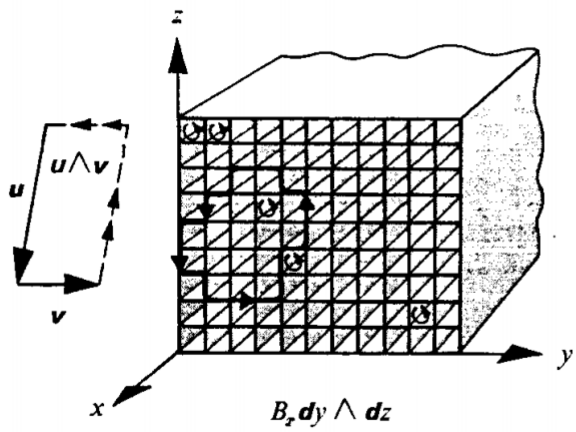


Analogamente al caso della 1-forma si può interpretare l'integrale di una data 2-forma su una specifica superficie con assegnato senso di circolazione:

$$\int_S \mathbf{F}$$

Eq. 7-2

Come il numero di celle della struttura alveolare tagliate da tale superficie (pag. 94).



Da questo sembra comoda la visione in trasformata di Hodge in 3 dimensioni: il trasformato della superficie è un vettore, mentre il trasformato della 2-forma è una 1-forma. Il calcolo procede secondo la normale contrazione. Nell'esempio di figura precedente si ha un particolare tensore Faraday, e l'integrazione sulla superficie è:

$$\int_{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}} \mathbf{F}$$

Eq. 7-3

Il ragionamento si può estendere non senza una certa capacità di astrazione a più dimensioni, nel seguente modo.

Data una qualsiasi varietà differenziabile (con o senza metrica), avendo selezionato una superficie *S* su cui effettuare l'integrazione, se ne dà per prima cosa una parametrizzazione nei parametri λ^1, …, λ^p. Ogni trasposizione definisce una superficie orientata in modo opposto alla precedente.

Si costruisce quindi l'iperparallelepipedo infinitesimo tangente a tale superficie:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda^1}\Delta\lambda^1\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda^p}\Delta\lambda^p\right)$$

Eq. 7-4

L'argomento dell'integrazione fornisce allora il numero di "ipercelle" (ossia: appartenenti alla struttura alveolare a *p*-dimensioni) che tale iperparallelepipedo "affetta":

$$\left\langle \boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial P}{\partial \lambda^1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial P}{\partial \lambda^p}\right\rangle \Delta\lambda^1\ldots\Delta\lambda^p$$

Eq. 7-5

Con questo argomento concettuale è possibile quindi interpretare il significato di:

$$\int \boldsymbol{\alpha} = \iint\ldots\int \left\langle \boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial P}{\partial \lambda^1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial P}{\partial \lambda^p}\right\rangle d\lambda^1\ldots d\lambda^p$$

Eq. 7-6

Forniamo quindi la regola computazionale, in *p* dimensioni. Per prima cosa partiamo dalla dipendenza locale della *p-forma*, esprimibile mediante:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{|i_1 i_2 \ldots i_p|}(x^1,\ldots,x^n)\mathbf{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{d}x^{i_p}$$

Eq. 7-7

Si definisce quindi una parametrizzazione di tale superficie mediante la sostituzione:

$$x^k = x^k(\lambda^1,\ldots,\lambda^p)$$

Eq. 7-8

Che porta a:

$$\boldsymbol{\alpha} = a(\lambda^1,\ldots,\lambda^p)\mathbf{d}\lambda^1\wedge\ldots\wedge\mathbf{d}\lambda^p$$

Eq. 7-9

Quindi si opera l'integrazione:

$$\int \boldsymbol{\alpha} = \int a(\lambda) d\lambda^1 ... d\lambda^p$$

Eq. 7-10

8. Il teorema di Stokes generalizzato

Sia dato *V* un ipervolume di dimensione *p+1*, e sia *∂V* una sua ipersuperficie chiusa di frontiera (ovviamente di dimensione *p*). Se **σ** è una p-forma definita entro *V*, vale allora:

$$\int_V \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}$$

Eq. 8-1

Vediamo qualche applicazione elementare.

Nel caso unidimensionale *V* è una curva e *∂V* sono i suoi estremi. Perché valga il teorema **σ** deve essere una 0-forma, per semplicità di notazione indicata con *f*. Vale allora:

$$\int_V \mathbf{d}f = \int_{\partial V} f = f_{end} - f_{start}$$

Eq. 8-2

Nel caso in cui *V* è una superficie (in un mondo 3D), *∂V* è la curva al contorno. **α** sia la 1-forma.

$$\int_V \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} = \int_{\partial V} \boldsymbol{\alpha}$$

Eq. 8-3

$$\int_V \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} = \int \left\langle \alpha_{i,j} \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^i , d\mathbf{x}^{(m)} \wedge d\mathbf{x}^{(n)} \right\rangle$$

Eq. 8-4

Passando in trasformata di Hodge (avendo presupposto la commutatività tra integrazione e Hodge):

$$* \left(\alpha_{i,j} \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^i \right) = \varepsilon_{jik} \alpha_{i,j} \mathbf{d}x^k$$
$$* \left(d\mathbf{x}^{(m)} \wedge d\mathbf{x}^{(n)} \right) = \varepsilon_{mnl} d\mathbf{x}^{(l)}$$
$$* \int_V \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} = \int \left\langle \varepsilon_{jik} \alpha_{i,j} \mathbf{d}x^k , dS \, \varepsilon_{mnl} \mathbf{e}_l \right\rangle = \int \delta_l^k \left(\nabla \times \boldsymbol{\alpha} \right)_k \mathbf{e}_l dS = \int \left(\nabla \times \boldsymbol{\alpha} \right)_k dS_k = \int \left(\nabla \times \boldsymbol{\alpha} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

Eq. 8-5

Dall'altra parte dell'uguale si ha invece:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{\alpha} = \int_{\gamma} \left\langle \boldsymbol{\alpha}, \frac{\partial P}{\partial x^i} \right\rangle dx^i = \oint_{\gamma} \boldsymbol{\alpha} \cdot d\mathbf{l}$$

Eq. 8-6

9. Il teorema di Gauss generalizzato

Scopriamo che il teorema di Gauss generalizzato altri non è che un'applicazione del teorema di Stokes (pag. 150):

$$\int_{V} \nabla \cdot \mathbf{S} = \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$$

Eq. 9-1

Al fine di mostrare un'applicazione utile e istruttiva dimostriamolo in un contesto di spazio-tempo piatto in 4 dimensioni, con **S** tensore costruito con un indice vettoriale (l'elemento di ipervolume sarà allora dato da una 4-forma). La notazione si espande nel seguente modo:

$$\int_{V} \nabla \cdot \mathbf{S}\ d^4\Omega = \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}$$

Eq. 9-2

Per prima cosa risultano ricavabili da quanto fin qui introdotto le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} d^4\Omega &= \varepsilon_{0123} \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = *1 \\ d^3\boldsymbol{\Sigma}_{(\mu)} &= \varepsilon_{\mu|\alpha\beta\gamma|} \mathbf{d}x^{\alpha} \wedge \mathbf{d}x^{\beta} \wedge \mathbf{d}x^{\gamma} \end{aligned}$$

Eq. 9-3

Si tratta quindi di applicare il teorema di Stokes e la definizione di derivata esterna

$$\int_{\partial V} \mathbf{S}^{\dots\mu} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}_{(\mu)} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{V} \mathbf{d}\left(\mathbf{S}^{\dots\mu} \cdot d^3\boldsymbol{\Sigma}_{(\mu)}\right) \overset{\text{Derivata esterna}}{=} \int_{V} \mathbf{S}^{\dots\mu}{}_{,\mu} *1 = \int_{V} \nabla \cdot \mathbf{S}$$

Eq. 9-4

Referenze

P. Caressa, "Tensori e forme differenziali", Roma 2006
S. Cacciatori, B. van Geemen. Lezioni di "Metodi geometrici per la fisica matematica"- vers. 07.0
M. Nacinovich, "Elementi di geometria analitica" Liguori, 1996
Wheeler, "Gravitation", W.H. Freeman and Company, 1995