Rottura spontanea di simmetria e bosone di Higgs

Luca Alfinito, gennaio 2020

1. Scelta della soluzione di minimo e rottura della simmetria

La simmetria di gauge introdotta con il modello di Yang-Mills non è conservata se nella densità Lagrangiana si introducono *ad-hoc* gli appropriati termini di massa: è dunque necessario costruire un meccanismo che preservi tale invarianza di gauge.

Si considera a tal proposito un campo scalare complesso, per la cui descrizione nella Lagrangiana viene introdotto un vertice di interazione a quattro rami:

$$L = \left(\partial^{\mu}\phi^{+}\right)\left(\partial_{\mu}\phi\right) - \mu^{2}\phi^{+}\phi - \lambda\left(\phi^{+}\phi\right)^{2}$$

Eq. 1-1

Evidentemente la Lagrangiana è invariante per trasformazione di fase globale:

$$\begin{aligned} &\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi \\ &\phi^{+} \rightarrow \phi^{+\prime} = e^{-i\alpha}\phi^{+} \end{aligned}$$

Eq. 1-2

Questa sarà la simmetria spontaneamente rotta. Per vedere come, mettiamoci subito nel caso di interesse (μ^2<0) per osservare che l'energia potenziale possiede una simmetria O(2) per la scelta dei minimi:

$$\phi_0 = \phi_{V=\min} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}e^{i\theta} = ve^{i\theta}$$

Eq. 1-3

Riferendosi rispettivamente alla parte reale e immaginaria per questo campo:

$$\begin{cases} \phi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi + \phi^{+}\right) \\ \phi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi - \phi^{+}\right) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 + i\phi_2\right) \\ \phi^{+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1 - i\phi_2\right) \end{aligned}$$

Eq. 1-4

I punti di minimo del potenziale nel piano (ϕ_1, ϕ_2) giacciono allora sulla circonferenza di raggio *v*.

Conseguenza di tale simmetria è la conservazione della corrente:

$$J^{\mu} = i\left[\left(\partial^{\mu}\phi\right)\phi^{+} - \phi\left(\partial^{\mu}\phi^{+}\right)\right]$$

Eq. 1-5

Mentre non compare alcun bosone perché la trasformazione prevista è globale.

Inoltre, l'invarianza della Lagrangiana sotto la trasformazione di fase globale ci permette allora di *scegliere* tale fase in modo che il campo che minimizza il potenziale sia puramente reale:

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} e^{i0} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v$$

Eq. 1-6

Introduciamo allora due campi che descrivano le perturbazioni della parte reale e immaginaria attorno a questo minimo, tale che il campo di partenza sia scrivibile come:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Eq. 1-7

In termini di questi campi la Lagrangiana diventa:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \phi_1 - i\partial^\mu \phi_2\right)\left(\partial_\mu \phi_1 + i\partial_\mu \phi_2\right) - \frac{1}{2}\mu^2\left[(v+\sigma_1)^2 + \sigma_2^2\right] - \frac{1}{4}\lambda\left[(v+\sigma_1)^2 + \sigma_2^2\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \sigma_1\right)\left(\partial_\mu \sigma_1\right) + \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \sigma_2\right)\left(\partial_\mu \sigma_2\right) - \frac{1}{2}\mu^2\left[v^2 + 2\sigma_1 v + \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right] - \frac{1}{4}\lambda\left[v^2 + \sigma_1^2 + 2v\sigma_1 + \sigma_2^2\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \sigma_1\right)\left(\partial_\mu \sigma_1\right) + \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \sigma_2\right)\left(\partial_\mu \sigma_2\right) - V(\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned}$$

Eq. 1-8

I termini incrociati rappresentano elementi di interazione, mentre i termini quadratici nei campi (insiti nel termine di potenziale) forniscono le masse:

$$L^{(M)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right|_{\phi_{V=\min}} \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(M^2\right)_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

Eq. 1-9

In particolare notiamo che:

$$\left(M^2\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 2\lambda v^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 1-10

Vediamo che risulta nulla la massa associata a σ_2, campo che – per la peculiare scelta del minimo che abbiamo compiuto - si sviluppa proprio lungo la direzione tangente alla curva di minimo. Questo risultato è noto come teorema di Goldstone: conseguenza della rottura di simmetria è la nascita di un bosone a massa nulla (detto bosone di Goldstone), che però non è osservato in natura. Possiamo allora eliminarlo introducendo una gauge mirata (detta *gauge unitaria*), sfruttando questa volta una simmetria per cambiamento di fase locale:

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x) & \sin\alpha(x) \\ -\sin\alpha(x) & \cos\alpha(x) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \alpha(x) \\ -\alpha(x) & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+\sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+\sigma_1+\alpha\sigma_2 \\ -\alpha v-\alpha\sigma_1+\sigma_2 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+\sigma_1 \\ -\alpha v+\sigma_2 \end{pmatrix}$$

Eq. 1-11

Le approssimazioni compiute sono valide perché abbiamo utilizzato sia per le *σ* che per le α(x) delle funzioni infinitesime, e abbiamo trascurato termini di ordine superiore. La gauge unitaria si realizza avendo cura di scegliere la fase in modo da annullare in ogni punto il campo di Goldstone:

$$\alpha(x) = \frac{\sigma_2(x)}{v} \quad \Rightarrow \quad \sigma'_2 = 0$$

Eq. 1-12

Naturalmente l'utilizzo della gauge unitaria comporta l'introduzione di un campo di gauge, cosicché le relazioni da maneggiare risultano:

$$\begin{aligned} L &= (D^\mu\phi)^+(D_\mu\phi) - \mu^2\phi^+\phi - \lambda(\phi^+\phi)^2 \\ D^\mu &= \partial^\mu - igC^\mu \\ C'_\mu &= C_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\nu C^\mu - \partial^\mu C^\nu \end{aligned}$$

Eq. 1-13

Ovviamente la presenza delle derivate covarianti comporta termini di accoppiamento tra il campo e il bosone vettore *C*. Nella gauge unitaria la Lagrangiana ha quindi la forma (verificabile con soli passaggi algebrici):

$$L = \frac{1}{2}(\partial^\mu\sigma_1)(\partial_\mu\sigma_1) - \frac{1}{2}M_H^2\sigma_1^2 + \frac{1}{2}M_C^2 C_\mu C^\mu - V(\sigma_1, C_\mu) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Eq. 1-14

In cui si riconoscono il termine cinetico sul campo σ_1, il termine di massa per il medesimo, il termine di massa per il campo di spin 1, i vari termini di interazione e di campo libero bosonico.

2. Il meccanismo di Higgs nella teoria elettrodebole

Weinberg e Salam indipendentemente l'uno dall'altro hanno scelto un doppietto $SU(2)_L$ di campi scalari che fosse in grado di generare la massa dei leptoni (e dei quark). Si pone per tale doppietto un'ipercarica *Y=1/2*:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}_{Y=1}$$

Eq. 2-1

Il contributo del doppietto alla Lagrangiana è dato da:

$$L = (D^\mu \phi)^+ (D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^+ \phi - \lambda (\phi^+ \phi)^2$$
$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^{[i]} \cdot \frac{\sigma^{[i]}}{2} + ig'\left(+\frac{1}{2}\right) B_\mu$$

Eq. 2-2

Su tale doppietto la carica elettrica è valutata dalla matrice:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 2-3

Applichiamo lo schema introdotto e supponiamo che il campo prenda un valore di aspettazione non nullo nel vuoto, e che si possa rompere la simmetria scegliendo una particolare configurazione per il minimo tra quelle possibili:

$$\phi_{V=\min} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

Eq. 2-4

Questa scelta è compiuta affinché il campo di minimo sia ancora invariante sotto le trasformazioni di fase del gruppo $U(1)_{em}$:

$$e^{i\alpha Q} \phi_{V=\min} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

Eq. 2-5

Come nel caso precedente si ha ancora:

$$\eta = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}$$

Eq. 2-6

La gauge unitaria in questo caso viene realizzata annullando tutto il campo ϕ_+ ed assicurando che il doppietto sia in ogni punto della forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+\sigma \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Eq. 2-7

In cui per ogni campo del doppietto sono state distinte le componenti immaginarie e reali. Tale gauge si può sempre realizzare con un matrice:

$$U(x) \in SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

Eq. 2-8

3. Le masse dei campi vettoriali

Le masse dei campi vettoriali hanno origine a partire dalle derivate covarianti sul campo di Higgs. I termini interessati sono (con un po' d'algebra):

$$\begin{aligned}
&W: \quad g^2 W_\mu^{[i]} W^{[j]\mu} \phi_{V=\min} \frac{\sigma^{[i]}}{2} \frac{\sigma^{[j]}}{2} \phi_{V=\min} = \frac{1}{2} g^2 \frac{v^2}{4} W_\mu^{[i]} W^{[i]\mu} \\
&B: \quad \frac{1}{2} (g')^2 \frac{v^2}{4} B_\mu B^\mu \\
&WB: gg' W_\mu^{[3]} B^\mu \phi_{V=\min} \frac{\sigma^{[3]}}{2} \phi_{V=\min} = -\frac{1}{2} gg' \frac{v^2}{4} W_\mu^{[3]} B^\mu
\end{aligned}$$

Eq. 3-1

Si ha dunque la matrice di mixing delle masse:

$$M = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix}$$

Eq. 3-2

Che ha determinante nullo (quindi ammette un autovalore a massa nulla: tale autovalore sarà associato al fotone). Ipotizziamo il fotone fisico come "rotazione di Weinberg":

$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^{[3]} + \cos\theta_W B_\mu$$

Eq. 3-3

Se dunque vogliamo che a tale costruzione corrisponda l'autovalore zero, si deve avere:

$$M\begin{pmatrix}\sin\theta_W\\ \cos\theta_W\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}\sin\theta_W\\ \cos\theta_W\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}g^2 & -gg'\\ -gg' & (g')^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta_W\\ \cos\theta_W\end{pmatrix}=0\quad g\sin\theta_W=g'\cos\theta_W(=e)$$

Eq. 3-4

Abbiamo dunque ritrovato il noto risultato. Ovviamente la rotazione di Weinberg porta alla definizione di un ulteriore bosone fisico:

$$Z_\mu=\cos\theta_W W_\mu^{[3]}-\sin\theta_W B_\mu$$

Eq. 3-5

4. La massa dell'elettrone

Il termine di massa dell'elettrone può essere così decomposto:

$$L_{m_e}=\overline{\psi}_e m_e\psi_e=\overline{\psi}_e(P_L+P_R)^+ m_e(P_L+P_R)\psi_e=$$
$$=\overline{\psi}_{e,L}m_e\psi_{e,L}+\overline{\psi}_{e,L}m_e\psi_{e,R}+\overline{\psi}_{e,R}m_e\psi_{e,L}+\overline{\psi}_{e,R}m_e\psi_{e,R}$$

Eq. 4-1

Pertanto la simmetria viene rotta a causa della presenza dei termini "misti", che mischiano le componenti destre e sinistre in termini di isospin (I_L=1/2, I_R=0):

$$L_{R.S.}=\overline{\psi}_{e,L}m_e\psi_{e,R}+\overline{\psi}_{e,R}m_e\psi_{e,L}$$

Eq. 4-2

Possiamo allora ottenere una Lagrangiana invariante accoppiando con il campo di Higgs (anch'esso I=1/2)

$$L_{e\phi}=g_e\left[\left(\overline{\nu}_e\ \overline{e}\right)_L\begin{pmatrix}\phi_+\\ \phi_0\end{pmatrix}e_R+\overline{e}_R\left(\phi_+\ \phi_0\right)\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L\right]=g_e\left[\overline{l}_L\phi e_R+\overline{e}_R\phi^+ l_L\right]$$

Eq. 4-3

Questa Lagrangiana nella gauge unitaria assicura che il neutrino, anche sinistro, sia tagliato fuori dalle interazioni con il bosone di Higgs:

$$L_{e\phi}=g_e\left[\overline{e}_L\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu+\sigma)e_R+\overline{e}_R\phi^+ l+\overline{e}_R\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu+\sigma)\right]e_L$$

Eq. 4-4

Reintroducendo i termini non misti:

$$L_e = g_e \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e} e + g_e \sigma \bar{e} e = L_{m_e} + \text{interazioni}$$

Eq. 4-5

Dunque il termine di massa dell'elettrone è dato da:

$$m_e = g_e \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Eq. 4-6

Referenze

[1] L. Maiani, "Interazioni elettrodeboli", Editori Riuniti, 2013

[2] F. Mandl, G. Shaw, "Quantum field theory", Wiley & Sons, 1984, Chap. 12 App. 12.6.2