

# Teoria perturbativa, tracce e identità di Fierz

Luca Alfinito, aprile 2020

## 1. Introduzione al problema: un diagramma a due vertici

Ci proponiamo di capire in che modo intervengano le tracce nel calcolo delle sezioni d'urto e come le identità di Fierz costituiscano spesso un utile ausilio per lo sviluppo delle ampiezze di probabilità. A questo scopo cominciamo da un caso pratico: il calcolo di un diagramma "ordine albero" dell'ampiezza di Feynman per la produzione di coppia di leptoni a partire da collisioni  $e^+e^-$  (escludendo il Bhabha scattering, che come è noto si compone di due grafici e non ci è utile in questa fase).

Sperando con ormai ovvio significato dei simboli, suddetta ampiezza risulta:

$$M(r_1, r_2, s_1, s_2) = ie^2 \left[ \bar{u}_{s_2}(P_2) \gamma_\mu v_{s_1}(P_1) \right] \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left[ \bar{v}_{r_1}(p_1) \gamma^\mu u_{r_2}(p_2) \right]_{e^+e^-}$$

1-1

Per ottenere la sezione d'urto non polarizzata richiediamo la media sugli spin iniziali e la somma su quelli finali:

$$X = \frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} |M(r_1, r_2, s_1, s_2)|^2$$

1-2

Il coniugato di  $M$  si può calcolare ricordando che:  $\gamma^{\alpha+} = \gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0$

$$M^*(r_1, r_2, s_1, s_2) = -ie^2 \left[ \bar{v}_{s_1}(P_1) \gamma_\beta u_{s_2}(P_2) \right] \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left[ \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma^\beta v_{r_1}(p_1) \right]_{e^+e^-}$$

1-3

Si ottiene in definitiva:

$$X = \frac{e^4}{4[(p_1 + p_2)^2]^2} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \left[ \bar{u}_{s_2}(P_2) \gamma_\mu v_{s_1}(P_1) \right] \left[ \bar{v}_{r_1}(p_1) \gamma^\mu u_{r_2}(p_2) \right]_{e^+e^-} \cdot \left[ \bar{v}_{s_1}(P_1) \gamma_\beta u_{s_2}(P_2) \right] \left[ \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma^\beta v_{r_1}(p_1) \right]_{e^+e^-}$$

1-4

Nei prossimi paragrafi vedremo alcune "ricette" per trattare espressioni come questa.

## 2. Somme su spin e tracce

Un metodo generale per sviluppare espressioni come la 1-4 è osservare che l'argomento della sommatoria (ovviamente estesa anche a  $\mu$  e  $\beta$ ) è un prodotto di quattro fattori che risolvono ciascuno gli indici matriciali: proprio per questo motivo l'ordine dei fattori è ovviamente permutabile.

Si può allora cercare di disporre i fattori in modo da poter estrarre gli operatori di proiezione di energia positiva o negativa, a seconda dei casi, ricordandone la loro costruzione (avendo dotato i bispinori della normalizzazione opportuna per i nostri scopi):

$$\Lambda_{ab}^+(p) = \sum_{s=1}^2 u_{sa}(p) \bar{u}_{sb}(p) = \frac{1}{2m} (\gamma^\mu p_\mu + m)_{ab}$$

$$\Lambda_{ab}^-(p) = -\sum_{s=1}^2 v_{sa}(p) \bar{v}_{sb}(p) = -\frac{1}{2m} (\gamma^\mu p_\mu - m)_{ab}$$

2-1

Omettendo i termini che non trattiamo (per il momento mantenendo come pedici gli indici bispinoriali):

$$\begin{aligned} \frac{X}{k} &= \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} [\bar{v}_{s_1}(P_1) \gamma_\beta u_{s_2}(P_2)]_j [\bar{u}_{s_2}(P_2) \gamma_\mu v_{s_1}(P_1)]_i [\bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma^\beta v_{r_1}(p_1)]_{e^+ e^-} [\bar{v}_{r_1}(p_1) \gamma^\mu u_{r_2}(p_2)]_{e^+ e^-} = \\ &= \sum_{r_2, s_1} \bar{v}_{s_1}(P_1)_a \gamma_{\beta ab} \Lambda_{bc}^+(P_2) \gamma_{\mu cd} v_{s_1}(P_1)_d \bar{u}_{r_2}(p_2)_e \gamma_{ef}^\beta [-\Lambda_{fg}^-(p_1)] \gamma_{gh}^\mu u_{r_2}(p_2)_h = \\ &= \sum_{r_2, s_1} v_{s_1}(P_1)_d \bar{v}_{s_1}(P_1)_a \gamma_{\beta ab} \Lambda_{bc}^+(P_2) \gamma_{\mu cd} u_{r_2}(p_2)_h \bar{u}_{r_2}(p_2)_e \gamma_{ef}^\beta [-\Lambda_{fg}^-(p_1)] \gamma_{gh}^\mu = \\ &= \left( [-\Lambda_{da}^-(P_1)] \gamma_{\beta ab} \Lambda_{bc}^+(P_2) \gamma_{\mu cd} \right) \left( \Lambda_{he}^+(p_2) \gamma_{ef}^\beta [-\Lambda_{fg}^-(p_1)] \gamma_{gh}^\mu \right) = \\ &= \text{Tr} \left[ \frac{1}{2m_l} (\gamma^\lambda P_{1\lambda} - m_l) \gamma_\beta \frac{1}{2m_l} (\gamma^\nu P_{2\nu} + m_l) \gamma_\mu \right] \cdot \text{Tr} \left[ \frac{1}{2m_e} (\gamma^\rho p_{2\rho} + m_e) \gamma^\beta \frac{1}{2m_e} (\gamma^\sigma p_{1\sigma} - m_e) \gamma^\mu \right] \end{aligned}$$

2-2

Dove nell'ultima riga sono comparse le tracce perché per ogni blocco il primo indice viene contratto con l'ultimo. Si possono applicare allora i risultati espressi ad esempio in [1, App. A.3]:

- ✓ La traccia di un prodotto di numero dispari di matrici  $\gamma$  è nulla;
- ✓  $\text{Tr}[\gamma^\alpha A_\alpha \gamma^\beta B_\beta] = 4AB$
- ✓  $\text{Tr}[\gamma^\alpha A_\alpha \gamma^\beta B_\beta \gamma^\rho C_\rho \gamma^\sigma D_\sigma] = 4[(AB)(CD) - (AC)(BD) + (AD)(BC)]$

Si ottiene quindi, con un po' di fatica:

$$\begin{aligned}
\frac{X}{k} &= 4 \frac{1}{2m_i} \frac{1}{2m_e} \left[ (P_{1\beta} P_{2\mu} - P_1 P_2 g_{\beta\mu} + P_{1\mu} P_{2\beta}) - m_i^2 g_{\beta\mu} \right] 4 \frac{1}{2m_e} \frac{1}{2m_e} \left[ (p_2^\beta p_1^\mu - p_2 p_1 g^{\beta\mu} + p_2^\mu p_1^\beta) - m_e^2 g^{\beta\mu} \right] = \\
&= \frac{1}{m_i^2 m_e^2} \left[ (P_{1\beta} P_{2\mu} + P_{1\mu} P_{2\beta}) - (m_i^2 + P_1 P_2) g_{\beta\mu} \right] \left[ (p_2^\beta p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\beta) - (m_e^2 + p_2 p_1) g^{\beta\mu} \right] = \\
&= \frac{1}{m_i^2 m_e^2} \left\{ 2(P_1 p_2 P_2 p_1 + P_1 p_1 P_2 p_2 - m_e^2 P_1 P_2 - P_1 P_2 p_2 p_1) - 2(m_i^2 + P_1 P_2) p_2 p_1 + (m_i^2 + P_1 P_2)(m_e^2 + p_2 p_1) \underbrace{g_{\beta\mu} g^{\beta\mu}}_4 \right\} = \\
&= \frac{2}{m_i^2 m_e^2} \{ P_1 p_2 P_2 p_1 + P_1 p_1 P_2 p_2 + m_e^2 P_1 P_2 + m_i^2 p_2 p_1 + 2m_i^2 m_e^2 \}
\end{aligned}$$

2-3

Il risultato finale, che ricordiamo calcolato nel riferimento del laboratorio, è:

$$X = \frac{e^4}{2m_i^2 m_e^2 [(p_1 + p_2)^2]} \{ P_1 p_2 P_2 p_1 + P_1 p_1 P_2 p_2 + m_e^2 P_1 P_2 + m_i^2 p_2 p_1 + 2m_i^2 m_e^2 \}$$

2-4

Ovviamente questo essendo covariante a vista. La tecnica successiva di manipolazione, che prevede di passare al sistema di riferimento del centro di massa (CoM frame), non è oggetto di questa sintesi.

### 3. Identità di Fierz

Vediamo come le identità di Fierz costituiscano uno strumento talvolta utile per trattare elementi scritti sotto forma di prodotto di due fattori:

$$(\bar{a} F b)(\bar{c} G d)$$

3-1

In cui  $F$  e  $G$  sono rappresentati da matrici 4x4. Esplicitiamo le componenti:

$$(\bar{a} F b)(\bar{c} G d) = \bar{a}_l F_j^l b^j \bar{c}_i G_m^i d^m$$

3-2

La resa esplicita degli indici permette di permutare liberamente l'ordine dei fattori di ciascun elemento della somma, ad esempio portando tutte le componenti bispinoriali, per il momento, a sinistra:

$$\bar{a}_l F_j^l b^j \bar{c}_i G_m^i d^m = \bar{a}_l b^j \bar{c}_i d^m F_j^l G_m^i$$

3-3

Per trattare i due termini matriciali ricordiamo che appartengono entrambi ad uno spazio di matrici 4x4. I generatori di tale spazio sono appunto 16 matrici, tante quante le componenti potenzialmente indipendenti, e possono essere scelte con questo criterio [2]:

$1$	scalare
$\gamma^5$	pseudoscalare
$\gamma^\mu$	vettore
$\gamma^5 \gamma^\mu$	pseudovettore
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	tensore antisimmetrico

3-4

Per quanto detto ogni matrice 4x4 potrà essere scritta:

$$T = \sum_{A=1}^{16} c_A B_A$$

3-5

In cui le  $B_A$  sono proprio le matrici di base (il pedice è in maiuscolo perché è esteso ai 16 elementi della base). Si dimostra che:

$$c_A = \frac{1}{4} \text{Tr}[T(B_A)^{-1}]$$

3-6

Dove gli inversi alle matrici scelte per la base sono, nella rappresentazione di Dirac:

$$\begin{aligned} (1)^{-1} &= 1 \\ (\gamma^5)^{-1} &= \gamma^5 \\ (\gamma^\mu)^{-1} &= \gamma_\mu \\ (\gamma^5 \gamma^\mu)^{-1} &= -\gamma^5 \gamma_\mu \\ (\sigma^{\mu\nu})^{-1} &= \sigma_{\mu\nu} \end{aligned}$$

3-7

Qualche testo [3] (non questi appunti) preferisce scrivere gli inversi in funzione delle matrici di partenza introducendo un coefficiente:

$$(B_A)^{-1} = \Delta_A B_A$$

3-8

Si tratta di verificare che (le componenti bispinoriali espresse con lettere latine):

$$T_j^i = \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} T_a^b (B_A)^{-1}_b{}^a (B_A)^i{}_j$$

3-9

Questo è sicuramente vero se:

$$\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (B_A)^{-1a} (B_A)^i_j = \delta_b^i \delta_j^a$$

3-10

Che è una proprietà degli elementi della base mostrata. Si moltiplica allora a sinistra di entrambi membri un opportuno fattore:

$$\underbrace{F_a^l G_m^b \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (B_A)^{-1a} (B_A)^i_j}_{\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (F(B_A)^{-1} G)_m^i (B_A)^i_j} = F_a^l G_m^b \delta_b^i \delta_j^a = F_j^l G_m^i$$

3-11

Si vede dunque che le due matrici hanno scambiato un indice, che permette di scrivere:

$$\bar{a}_l b^j \bar{c}_i d^m F_j^l G_m^i = \bar{a}_l \left[ \frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (F(B_A)^{-1} G) \right]_m^l d^m \bar{c}_i (B_A)^i_j b^j$$

3-12

In definitiva:

$$(\bar{a} F b)(\bar{c} G d) = \frac{1}{4} \sum_A [\bar{a} (F(B_A)^{-1} G) d] (\bar{c} B_A b)$$

3-13

Spesso nello sviluppo perturbativo troviamo espressioni del tipo:

$$(\bar{a} O_i b)(\bar{c} O^i d)$$

3-14

In cui i possibili valori assunti dall'indice  $i$  dipendono dalla natura dell'operatore  $O$ . Vediamo le possibilità:

$(\bar{a} b)(\bar{c} d)$	variante scalare (S)
$(\bar{a} \gamma_5 b)(\bar{c} \gamma^5 d)$	variante pseudoscalare (PS)
$(\bar{a} \gamma_\alpha b)(\bar{c} \gamma^\alpha d)$	variante vettoriale (V)
$(\bar{a} \gamma_\alpha \gamma_5 b)(\bar{c} \gamma^\alpha \gamma^5 d)$	variante pseudovettoriale (PV)
$(\bar{a} \sigma_{\alpha\beta} b)(\bar{c} \sigma^{\alpha\beta} d)$	variante tensoriale (T)

3-15

Utilizziamo dunque l'identità ricavata nella 3-13 nel caso di variante vettoriale. Scriviamo dunque:

$$\begin{aligned}
(\bar{a}\gamma_\alpha b)(\bar{c}\gamma^\alpha d) &= (\bar{a}\gamma_\alpha\gamma^\alpha d)(\bar{c}b) + (\bar{a}\gamma_\alpha\gamma^5\gamma^\alpha d)(\bar{c}\gamma^5 b) + \\
&+ (\bar{a}\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma^\alpha d)(\bar{c}\gamma^\mu b) + (\bar{a}\gamma_\alpha(-\gamma^5\gamma_\mu)\gamma^\alpha d)(\bar{c}\gamma^5\gamma^\mu b) + \\
&+ (\bar{a}\gamma_\alpha\sigma_{\mu\nu}\gamma^\alpha d)(\bar{c}\sigma^{\mu\nu}b)
\end{aligned}$$

3-16

Vengono in aiuto allora per la computazione le seguenti relazioni:

$\gamma_\alpha 1 \gamma^\alpha = 4$	scalare
$\gamma_\alpha \gamma^5 \gamma^\alpha = -4\gamma^5$	pseudoscalare
$\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha = -2\gamma^\mu$	vettore
$\gamma_\alpha \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\alpha = 2\gamma^5 \gamma^\mu$	pseudovettore
$\gamma_\alpha \sigma^{\mu\nu} \gamma^\alpha = 0$	tensore antisimmetrico

3-17

In particolare l'ultima relazione deriva dalla prima delle due ulteriori relazioni fornite:

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha &= 4g^{\mu\nu} \\
\gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\alpha &= -2\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu
\end{aligned}$$

3-18

In virtù di questo la 3-16 si sviluppa (suddividendo nelle tre righe i casi S-PS/V-A/T):

$$\begin{aligned}
(\bar{a}\gamma_\alpha b)(\bar{c}\gamma^\alpha d) &= 4(\bar{a}d)(\bar{c}b) - 4(\bar{a}\gamma^5 d)(\bar{c}\gamma^5 b) + \\
&- 2(\bar{a}\gamma_\mu d)(\bar{c}\gamma^\mu b) - 2(\bar{a}\gamma^5\gamma_\mu d)(\bar{c}\gamma^5\gamma^\mu b) + \\
&+ 0
\end{aligned}$$

3-19

Anche se apparentemente l'espressione risulta più complicata di quella di partenza, l'utilità deriva dall'aver invertito il terz'ultimo e l'ultimo termine in tutti gli addendi, circostanza che in alcuni casi permette di ricondursi al calcolo di tracce come discusso nel paragrafo 2.

## Referenze

- [1] F. Mandl, G. Shaw, "Quantum field theory", Wiley & Sons, 1984, Chap. 12 App. 12.6.2
- [2] A. Di Giacomo, "Fisica Teorica", Ed. ETS 1992
- [3] L. B. Okun, "Leptoni e Quark", Editori Riuniti University Press, 2011