La derivata covariante in Relatività Generale e nelle Teorie di Gauge

Luca Alfinito, marzo-maggio 2020

Il concetto di derivata covariante viene utilizzato sia in RG che nelle Teorie di Gauge proprio in virtù dell'analogia strettissima, riferita alla costruzione di tale operatore.

1. La derivata covariante in RG

Il presupposto fondamentale di una teoria geometrica della RG è quello di operare su una varietà (lo spazio-tempo) su cui possa essere definito un fibrato di spazi vettoriali tangenti a ciascun punto. In particolare se si vuole confrontare lo stesso elemento della base ma definito in due punti "vicini" dello spazio tempo, legati dal passaggio di una curva ϒ, si deve avere:

$$\nabla_{\gamma}\mathbf{e}_{\alpha} = \left.\frac{\theta_{BA}\left[\mathbf{e}_{\alpha}(B)\right]-\mathbf{e}_{\alpha}}{d\lambda}\right|_{\gamma(\lambda)}$$

Eq. 1-1

Che definisce l'idea di trasporto parallelo. Se poi la curva γ è una curva coordinata (ossia di tangente $\mathbf{e}_\beta$) si potrà scrivere:

$$\nabla_{\gamma}\mathbf{e}_{\alpha} = \nabla_{\mathbf{e}_{\beta}}\mathbf{e}_{\alpha} = \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_{\rho}$$

Eq. 1-2

Questo in particolare permette di derivare qualsiasi campo vettoriale:

$$\nabla_{\mathbf{e}_{\beta}}\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{e}_{\beta}}\left(v^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}\right) = v^{\alpha}_{,\beta}\mathbf{e}_{\alpha} + v^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_{\rho} \overset{\alpha\to\rho\text{ I termine}}{=} \left(v^{\rho}_{,\beta} + v^{\alpha}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\right)\mathbf{e}_{\rho}$$

Eq. 1-3

2. La derivata covariante nelle Teorie di Gauge

Consideriamo un insieme di n campi f_i, che definiremo multipletto (distinti con lettera latina), accomunati da una certa simmetria per rimescolamento. Tale rimescolamento è generalmente definito mediante un gruppo G speciale unitario (o antiuniario). Sia ψ la combinazione lineare di questi campi (con l'ovvia normalizzazione dei coefficienti f_i):

$$\psi = \psi^{i} f_{i}$$

Eq. 2-1

Nel passaggio da un punto all'altro della varietà spazio-temporale possiamo allora pensare ad una derivata covariante che renda ragione della variazione della stessa base attraverso un analogo del trasporto parallelo definito in precedenza. In altre parole dato il multipletto in B, prossimo ad A, si tratta di calcolare il trasporto parallelo idoneo alla definizione della derivata covariante

$$\nabla_{\gamma}\psi(A)=\left.\frac{\theta_{BA}[\psi(B)]-\psi(A)}{d\lambda}\right|_{\gamma(\lambda)}$$

Eq. 2-2

Il trasporto parallelo di fatto definisce in A un *nuovo* multipletto di campi. Analogamente alla Eq. 1-2 potremo scrivere:

$$\nabla_{\mathbf{e}_\beta} f_i = \Gamma^{r}{}_{i\beta} f_r$$

Eq. 2-3

Che porta a sviluppare la derivata covariante sul multipletto:

$$\nabla_{\mathbf{e}_\beta}\psi=\nabla_{\mathbf{e}_\beta}\left(\psi^i f_i\right)=\psi^i_{,\beta} f_i+\psi^i\Gamma^{r}{}_{i\beta} f_r \overset{i\to r\ \text{I termine}}{=} \left(\psi^r_{,\beta}+\psi^i\Gamma^{r}{}_{i\beta}\right)f_r$$

Eq. 2-4

Nella direzione generica:

$$\nabla_{\mathbf{e}_\beta}\psi\ dx^\beta=\left(\psi^r_{,\beta}+\psi^i\Gamma^{r}{}_{i\beta}\right)f_r dx^\beta=\left(\psi^r(x+dx)-\psi^r(x)\right)f_r+\psi^i\Gamma^{r}{}_{i\beta}dx^\beta f_r$$

Eq. 2-5

Quindi la nozione di *trasporto parallelo* da B ad A infinitamente vicini per un multipletto assume la forma, invertendo la Eq. 2-2:

$$\begin{aligned}\theta_{BA}[\psi(x_B)]&=\nabla_{\mathbf{e}_\beta}\psi\ dx^\beta+\psi(A)=\left(\psi^r(x_A+dx_{(\beta)})+\psi^i(x_A)\Gamma^{r}{}_{i\beta}dx^\beta\right)f_r=\\&=\left(\psi^r(x_A)+\partial_\beta\psi^r(x_A)dx^\beta\right)f_r+\psi^i(x_A)\Gamma^{r}{}_{i\beta}dx^\beta f_r=\\&=\left(\psi^r(x_A)+\left(\delta^r_i\partial_\beta+\Gamma^{r}{}_{i\beta}\right)\psi^i(x_A)dx^\beta\right)f_r\end{aligned}$$

Eq. 2-6

Dunque i coefficienti di connessione rimescolano i campi. Omettendone gli indici si può scrivere:

$$\theta_{BA}[\psi(x_B)]=\psi(x_A)+\left(\mathbf{1}\partial_\mu+\Gamma_\mu\right)\psi(x_A)dx^\mu$$

Eq. 2-7

In generale l'elemento di "Christoffel" può essere pensato come somma dei contributi dei vari generatori infinitesimi del gruppo:

$$\Gamma^{r}{}_{i\beta} = H_{\beta}^{(j)}(x)\mathrm{T}^{(j)}{}_{i}^{r}$$

Eq. 2-8

Questa costruzione definisce i campi quadrivettoriali bosonici *H*. Segue da questo la definizione di derivata covariante:

$$D_{\mu} = \left(\mathbf{1}\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}\right) = \mathbf{1}\partial_{\mu} + H_{\mu}^{(j)}(x)\mathrm{T}^{(j)}$$

Eq. 2-9

Che induce il cosiddetto accoppiamento minimale.