Il curioso show di Alice e Bob, ossia: l’*entanglement* spiegato con un trucco circense

Luca Alfinito, 2017-2020

Molto tempo fa ho avuto il piacere di leggere il bellissimo libro “Un’occhiata alle carte di Dio” [1] del Professore Emerito Gian Carlo Ghirardi, adatto soprattutto agli addetti ai lavori ma comunque accessibile a chiunque sia capitato di interessarsi alle principali implicazioni filosofiche della meccanica quantistica.
Il libro, che descrive una grandissima varietà di tematiche, mi ha appassionato incredibilmente per la ricchezza di spunti e per la lucidità di esposizione. Ho allora pensato di concentrarmi su un particolare aspetto della questione, l’entanglement fotonico, e sviluppare una storiella che era già embrionalmente presente nel testo originale. Ecco qua il mio tentativo di presentare l’argomento.

L'incredibile spettacolo al circo

"Signore e signori, questo è l'incredibile show di Alice e Bob. Benvenuti a tutti! Sì, perché quello che faranno Alice e Bob questa sera, e che del resto ripetono tutte le sere nel corso di questo spettacolo itinerante, ha veramente dell'incredibile. Magnifico, mirabolante! Accorrete, gente, accorrete!"
Così comincia il clown sui trampoli con il megafono, mentre la folla si appresta a comprare il biglietto. Finalmente, solo dopo che tutti si sono seduti sulle gradonate, si accendono lo luci al centro della pista e lo spettacolo inizia. Arriva un altro pagliaccio:
"Signore e signori, buonasera! Stiamo per mostrarvi la più straordinaria dimostrazione di telepatia mai realizzata al mondo. Sì, perché Alice e Bob possono comunicare tra loro con la mente! Non c'è trucco non c'è inganno! Per dimostrarlo, ecco due cabine, la cabina A per Alice e la cabina B per Bob." (due pagliacci portano due cabine sulla pista, Alice e Bob entrano ciascuno nella propria).
"Come vedete, le due cabine sono insonorizzate. Alice e Bob non possono sentirsi tra di loro. Non c'è niente, invero, che possa metterli in comunicazione. Benissimo! Adesso, pubblico, vedremo cosa sono in grado di fare. Qui ci sono tre carte per Alice, rispettivamente con i numeri 1, 2 e 3. E qui ci sono altre tre carte, per Bob. Adesso, quello che faremo è sorteggiare (a loro insaputa) una carta per Alice e una carta per Bob.
Le carte saranno passate ad Alice e Bob da una fenditura sottile e di larghezza giusta. In ogni cabina ci sono due bottoni: uno verde, con la scritta SI, uno rosso con la scritta NO. Alice e Bob leggeranno il valore della carta e potranno decidere, sì, *decidere*, se premere il bottone verde o quello rosso. Quindi sopra ciascuna cabina si accenderà un grosso SI o un grosso NO, a seconda della scelta compiuta.
Potremo avere risposte concordanti oppure discordanti: due SI o due NO, oppure un SI e un NO, o anche un NO e un SI. Ebbene, e dico ebbene signore e signori miei, io vi *prometto* che OGNI volta che ad Alice e Bob sarà data una carta con lo *stesso* valore, loro premeranno lo *stesso* bottone. Stessa carta? Stessa risposta! Provare per credere, signore e signori, provare per credere!"

E il numero va avanti tutta la sera. Certamente una trama non troppo avvincente, ma un risultato stupefacente: succede davvero così. Tutte le volte. Come era successo la sera prima, e la prima ancora, e da sempre. E la cosa ancora straordinaria è che le risposte sembrano veramente casuali. Alice riceve più e più volte durante la sera la carta 2, e il 50% delle volte risponde SI, l'altro 50% risponde no. Così per le altre carte. Ma tutte, e dico tutte, le volte che Alice e Bob ricevono la *stessa carta*, le loro risposte sono uguali, siano esse SI oppure NO. Stupefacente, vero?

Capita adesso che tra il pubblico siedano Einstein e Bohr. Da bravi osservatori si mettono a studiare il fenomeno in tutti i suoi aspetti, anche quelli meno evidenti. La prima cosa che notano, oltre al sistematico avverarsi della meravigliosa promessa, è un fatto abbastanza scontato: Alice e Bob non premono il tasto contemporaneamente, ciascuno si prende il proprio tempo per decidere ma è completamente casuale chi per primo fornisce la propria risposta sul display sopra la cabina (cioè il 50% delle volte Alice preme per prima,

per il 50% di volte rimanenti è invece Bob il più veloce); oltretutto a volte l'intervallo di tempo tra i due è talmente piccolo che non si può pensare questi abbiano il tempo di comunicarsi alcunché.
Einstein, assai sospettoso, ritiene inconcepibile che la scelta di Alice possa condizionare Bob (o viceversa), soprattutto se questi di fatto non possono parlarsi in alcun modo.
"Niels, questi fanno i furbi. Utilizzano uno schema che avevano preventivamente concordato".
"Ce ne accorgeremmo, Albert."
"D'accordo Niels. Mi è venuta in mente una maniera per controllarlo. Dobbiamo però contare quante volte in totale rispondono in modo concorde a prescindere dalle carte che hanno pescato."
"Ok, Albert. Vorrà dire che torneremo domani a rivederci lo show. Così mi spiegherai meglio".

L'indomani si ripresentano, stesso tendone da circo, stesso numero. Bohr reca con sé un taccuino, Einstein sorride beffardo.
"Albert, mi spieghi dunque cos'hai in mente?"
"Allora Niels, è presto detto. Voglio verificare se accade una circostanza che può succedere solo se si sono accordati prima."
" ...?"
"Ti dirò subito l'epilogo della questione: se c'è un accordo, ossia uno schema operativo di qualsiasi tipo, ma ti ripeto anche se utilizzano una tabella di risposte prestabilite differente ad ogni tentativo, il numero di risposte concordi della serata sarà statisticamente maggiore del numero di quelle discordi."
Bohr al solito arranca, e cerca di seguire il ragionamento del compagno d'avventure.
"Sì, Niels, è così. Supponi ad esempio che lo schema sia: alla carta 1 si risponde con "No", alla carta 2 con "Sì", alla Carta 3 ancora con "No".
I casi possibili sono comunque nove:

Alice carta 1 e Bob carta 1: la risposta è concorde (No)
Alice carta 1 e Bob carta 2: risposta discorde (No e Sì)
Alice carta 1 e Bob carta 3: riposta concorde (No)
Alice carta 2 e Bob carta 1: risposta discorde (Sì e No)
Alice carta 2 e Bob carta 2: risposta concorde (Sì)
Alice carta 2 e Bob carta 3: risposta discorde (Sì e No)
Alice carta 3 e Bob carta 1: risposta concorde (No)
Alice carta 3 e Bob carta 2: risposta discorde (No e Sì)
Alice carta 3 e Bob carta 3: risposta concorde (No)

Ci sono quindi in totale 5 casi di risposta concorde sui 9 totali. La statistica su un gran numero di prove comincerebbe a farsi sentire, e noi potremmo ritenere lecito sospettare dell'accordo."

"Albert, ma tu hai fatto i conti con uno schema preciso. E se ce ne fossero altri più camuffanti?"
"Niels, verifica tu stesso: dato qualsiasi schema di accordo tu possa considerare, le risposte concordi sono *almeno* 5 su 9. Vi è addirittura un caso banale, ossia che decidano di rispondere Sì (o No, è lo stesso) a prescindere dalla carta pescata, e allora si avrebbero addirittura 9 casi concordi su 9. Ma se anche adottassero questo schema di accordo solo per qualche prova nel corso della serata, questo non farebbe che migliorare la nostra statistica verso l'asimmetria di accadimenti concordi/discordi"
"Per Giove, Albert, hai ragione! Sembra tu abbia sempre ragione. Quasi irritante."
"Ok, Niels, cominciano. Contiamo."

A volte non sono le cose ad essere incredibili di per sé, ma incredibile è il fatto che ce ne accorgiamo. Lo show finisce e al termine del conteggio i casi concordi sono statisticamente la *metà* (e non più della metà) del totale. Einstein aveva trovato una strada, ma l'esito si è rivelato per lui inaspettato: nessun accordo preventivo può essere smascherato. Alice e Bob sono davvero *telepatici*.

L'insostenibile leggerezza dell'es…perimento fotonico.

Quanto successo continua a turbare Albert nei giorni a seguire. Telefona a tutti i suoi amici e racconta la stessa storia, le due cabine, le carte, la scelta casuale, la risposta sempre coerente nel caso che le carte fornite siano uguali. Sennonché si ricorda di un tale Edwin Land, che ad Harvard aveva messo a punto un foglio cosiddetto "polarizzante" (il famoso Polaroid!), ossia semplicemente una pellicola di plastica drogata con cristalli di erapatite. Ora accade che il filtro Polaroid riveli una proprietà molto particolare della luce, ossia la *polarizzazione*: questa proprietà deriva dal fatto che, quando il raggio/onda di luce procede in una certa direzione, il campo elettromagnetico che questa trasmette può giacere solo su un piano perpendicolare a tale direzione di propagazione. Inoltre ci viene in aiuto la matematica, che ci permette di scomporre ogni direzione appartenente a questo piano come la somma di un contributo verticale ("V") e di uno orizzontale ("O") semplicemente attraverso le leggi della trigonometria: così se il campo è polarizzato lungo una direzione che descrive un angolo ϑ rispetto alla verticale (vedi figura) potremo scrivere, prendendo in prestito la notazione di Dirac (altro amico di Einstein):

$$\left|\vartheta\right\rangle = \cos\vartheta\left|\mathrm{V}\right\rangle + \sin\vartheta\left|\mathrm{O}\right\rangle$$

dove lo "stato" è inserito dentro una stanghetta e una parentesi spezzata. Il generico stato di polarizzazione è quindi scritto come una combinazione di una polarizzazione orizzontale e di una verticale. Il Polaroid è perciò un selettore di polarizzazione: un filtro "verticale" lascia passare solo la componente omonima, ed è evidenza sperimentale che la percentuale di potenza luminosa uscita dal filtro è proporzionale proprio al quadrato del coseno dell'angolo tra la direzione filtrata e la polarizzazione originale [2].
Einstein è sempre stato un giocherellone, e nella nostra storia ce lo vogliamo immaginare chiuso nel laboratorio a fare esperimenti con i polaroid (in realtà non è andata affatto così, ma poco importa).
Prende per prima cosa un fascio di luce perfettamente polarizzato verticale e vi mette davanti un polaroid verticale: la luce passa tutta (ma pensa un po'); subito dopo il primo polaroid ne inserisce ora uno orizzontale, ed ecco qui: la luce si ferma tutta (facile, eh?). Ci si può chiedere perché sia necessario fare prove triviali: beh, per arrivare a qualunque numero si deve partire sempre dall'uno più uno.
La situazione che si trova Einstein è dunque questa: possiede una sorgente di luce polarizzata che può girare come vuole (può cioè creare un fascio polarizzato a qualsiasi angolo), e questa luce viene inviata a due polarizzatori in serie, rispettivamente uno verticale e uno orizzontale. Buio in uscita dall'ultimo polarizzatore: la luce è stata tutta fermata.
Adesso però è qui che Einstein fa l'Einstein, ed inserisce un terzo filtro polarizzatore a 45° in mezzo agli altri due. Cosa succede mai? Il pubblico quadratico medio ancora ai giorni nostri penserebbe che se con due filtri avevo ottenuto il buio, a maggior ragione buoi sarebbe rimasto con tre filtri… e invece no! Dall'ultimo filtro esce luce, pur attenuata rispetto a quella prodotta dalla sorgente, ma sempre luce! E precisamente l'intensità del fascio uscente è 1/4 rispetto a quella originaria.
"Evidentemente l'inserzione del polaroid a 45° ha distrutto la selezione di verticalità pura del primo filtro. In qualche modo ha annullato l'effetto test del primo filtro."
Come possiamo spiegare quanto succede?
Consideriamo il fascio polarizzato verticale in uscita dal primo filtro. Il trucco è pensarlo scomposto in due direzioni ortogonali tra loro scegliendo un angolo di 45° rispetto alla verticale, ossia scrivere:

$$\left|V\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|45^\circ\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|135^\circ\right\rangle$$

Solo scrivendo questa relazione è facile comprendere che quando il raggio incontra il filtro a 45° è solo la prima componente della somma ad essere selezionata, mentre la seconda viene scartata. Metà della luce (il quadrato del primo coefficiente) è stata quindi assorbita, e non passa il secondo filtro. Adesso quindi il fascio è polarizzato a 45°; ma allora potremo ancora scrivere questa direzione come la scomposizione in una verticale ed una orizzontale:

$$|45°\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|O\rangle$$

In definitiva il secondo filtro polaroid ha "rigenerato" una componente orizzontale che il primo filtro aveva eliminato. E che passerà dall'ultimo polaroid, con una frequenza del 50%. In definitiva, contando tutti gli smorzamenti indotti dai vari polaroid, si trova un'energia in uscita dall'apparato pari ad 1/4 di quella entrante, ossia il 25%. Curioso, vero?

Einstein sta facendo questo perché ha un'intuizione: collegare la proprietà della luce e dei polaroid appena descritta con il numero di Alice e Bob.

Il nesso con l'entaglement dei fotoni

Veniamo adesso alla parte "calcolosa", dove si opera, senza esplicitarlo, il passaggio di punto di vista dalla semplice sovrapposizione di polarizzazioni alla vera e propria sovrapposizione di stati, tipica della meccanica quantistica. Il presupposto di partenza è quello di verificare se si possa creare in laboratorio un sistema sperimentale che riproduca un comportamento analogo a quello di Alice e Bob al circo. Chi conosce già la risposta troverà naturale, per prima cosa, assegnare una corrispondenza tra le tre carte e tre orientazioni del polaroid così scelte: verticale (V), 60° dalla verticale, 120° dalla verticale. Con un po' di trigonometria (basta applicare l'effetto di una rotazione, vedi successiva Figura 1) si ricava che ad esempio la polarizzazione verticale può essere scomposta nella componente a 60° e nella sua ortogonale (60°+90°=150°) in questo modo:

$$|V\rangle = \cos 60°|60°\rangle - \sin 60°|150°\rangle$$
$$|O\rangle = \sin 60°|60°\rangle + \cos 60°|150°\rangle$$

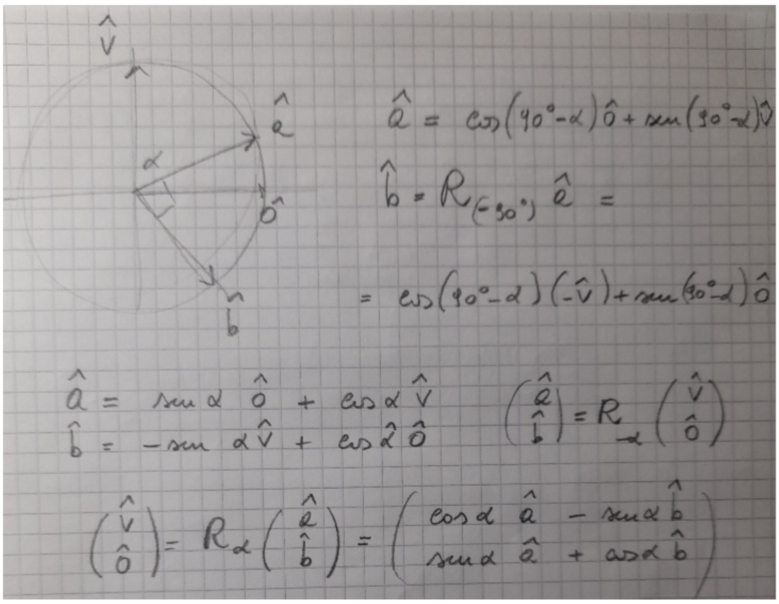

Figura 1. Un esempio di come sviluppare le relazioni tra stati di polarizzazione per angolo generico dalla verticale

Analogamente, se consideriamo lo stato di polarizzazione verticale come combinazione dello stato a 120° e del suo ortogonale (120°+90°=210°):

$$
\begin{aligned}
\left|V\right\rangle &= \cos 120° \left|120°\right\rangle - \sin 120° \left|210°\right\rangle \\
\left|O\right\rangle &= \sin 120° \left|120°\right\rangle + \cos 120° \left|210°\right\rangle
\end{aligned}
$$

Segue che quando lo stato è polarizzato verticalmente l'intensità luminosa che passa da un polaroid a 60° è il quadrato del cos60°, ossia 1/4. E la stessa intensità si verifica per un polaroid a 120° (ancora verificabile dalle relazioni trigonometriche), ancora pari a 1/4 di quella incidente. Diremo quindi che la probabilità di successo di un successivo test con angoli di polarizzazione a 60° o 120° su uno stato polarizzato verticalmente è pari a 1/4 (passa un fotone ogni 4). Si noti che, data una qualsiasi polarizzazione iniziale nota, la particolare scelta degli angoli equidistanti 60° tra le direzioni di polarizzazione permette di utilizzare sempre le stesse probabilità per le due rimanenti polarizzazioni.

Senza perdere di generalità supponiamo che sia Alice la prima a guardare la carta, ma il risultato sarebbe lo stesso anche se l'ordine di lettura fosse casuale ad ogni prova. Immaginiamo allora un esperimento che, riproducendo per i fotoni lo stesso comportamento di Alice e Bob, possa essere così schematizzato:

Carta selezionata da Alice	**Corrispondente test di polarizzazione per Alice**	**Esito test polarizzazione Alice**	**Carta selezionata da Bob**	**Corrispondente test di polarizzazione per Bob**	**Possibili esiti Bob per questa carta e relative probabilità**
1	V	Sì	1	V	Sì (1)
1	V	No	1	V	No (1)
1	V	Sì	2	60°	Sì (1/4), No (3/4)
1	V	No	2	60°	Sì (3/4), No (1/4)
1	V	Sì	3	120°	Sì (1/4), No
1	V	No	3	120°	Sì (3/4), No (1/4)

+ stesso schema ripetuto per le altre due possibilità della carta per Alice (carta 2 o 3)

In questo modo la probabilità di test concordi è infatti (ogni addendo conta per ciascuna riga della tabella):

$$
P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}
$$

La simmetria per rotazioni di 60° fa sì che il conteggio degli altri casi di selezione per Alice porti esclusivamente un fattore 3 sia a numeratore che a denominatore delle probabilità, lasciando quindi immutato il risultato del calcolo della probabilità dei test concordi.

Quello di cui possiamo renderci conto, non senza un piccolo sforzo, è che i risultati riportati in questo schema corrispondono alla situazione sperimentale di due fotoni per i quali, una volta rivelato lo stato di polarizzazione del fotone di Alice, diventa certo che anche il fotone di Bob manifesterà la stessa polarizzazione laddove venga fatto lo specifico test! Solo infatti se i due fotoni sono anch'essi *telepatici* la manifestazione dello stato del primo porterà automaticamente alla conoscenza dello stato del secondo, che sarà il medesimo. Questo legame, o entanglement, si può esprimere solo mediante una sovrapposizione di possibilità del tipo:

$$
\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left|V\right\rangle_{Alice} \left|V\right\rangle_{Bob} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left|O\right\rangle_{Alice} \left|O\right\rangle_{Bob}
$$

Lo stato complessivo non è dato dalla combinazione più generale possibile degli stati di partenza, ma solo da termini che imparentano i risultati. In altre parole: una volta misurata Alice, lo stato di Bob è noto di conseguenza (ovviamente nessuna predizione può essere fatta sul tipo di carta, ossia di misura, che dovranno compiere i due protagonisti).
Vediamo che la forma della sovrapposizione si presta bene anche nel caso che per il primo a prendere la carta venga inizialmente testata una polarizzazione differente da quella verticale o orizzontale, e per farlo - per i più pazienti - è possibile sviluppare il calcolo, considerando ad esempio il caso 60° e sostituendo per le polarizzazioni V e O quanto ricavato in precedenza:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos 60°|60°\rangle - \sin 60°|150°\rangle\right\}_{Alice}\left\{\cos 60°|60°\rangle - \sin 60°|150°\rangle\right\}_{Bob} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sin 60°|60°\rangle + \cos 60°|150°\rangle\right\}_{Alice}\left\{\sin 60°|60°\rangle + \cos 60°|150°\rangle\right\}_{Bob} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 60°|60°\rangle_{Alice}|60°\rangle_{Bob} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 60°\sin 60°|60°\rangle_{Alice}|150°\rangle_{Bob} + \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 60°\cos 60°|150°\rangle_{Alice}|60°\rangle_{Bob} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 60°|150°\rangle_{Alice}|150°\rangle_{Bob} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 60°|60°\rangle_{Alice}|60°\rangle_{Bob} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 60°\cos 60°|60°\rangle_{Alice}|150°\rangle_{Bob} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 60°\sin 60°|150°\rangle_{Alice}|60°\rangle_{Bob} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 60°|150°\rangle_{Alice}|150°\rangle_{Bob} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|60°\rangle_{Alice}|60°\rangle_{Bob} + \frac{1}{\sqrt{2}}|150°\rangle_{Alice}|150°\rangle_{Bob}
\end{aligned}$$

Questo risultato ci dice che il successo (o l'insuccesso) in un test di polarizzazione a 60° decreta immediatamente che la stesso test sull'altro fotone determinerebbe il medesimo successo (o insuccesso). E così per l'eventuale selezione del test a 120°. Dunque Alice e Bob utilizzano un trucco: preparano ad ogni sorteggio uno stato di due fotoni polarizzati, e se ne tengono uno per ciascuno compiendo, prima di rispondere, il test di polarizzazione previsto dalla carta. "Caro Niels, devo ammettere che tra i due circensi e i fotoni, almeno la seconda coppia è davvero telepatica!" esclama Albert con un leggero ghigno di disappunto.

Notiamo comunque che, nonostante l'evidenza di questo legame sia istantanea, l'informazione non è parimenti istantaneamente trasmissibile allo spettatore dello show: solo confrontando gli esiti a posteriori, "leggendo i taccuini con le annotazioni dei risultati" [2], si può rivelare l'intrinseca essenza del fenomeno. In questo senso la relatività è salva, e nessuna informazione può essere trasmessa senza nesso causale.

Qual è la morale della storia? Il prof. Ghirardi conclude che la meccanica quantistica è, per le sue previsioni, inconciliabile con l'ipotesi di esistenza di elementi di realtà oggettivamente posseduti dai fotoni della coppia *prima* che uno di essi venga sottoposto al test [1, pag. 212]: questo significa che non vi è nessun accordo segreto da svelare, nessun parametro nascosto individuabile con l'esperimento giusto, né ha senso chiedersi il loro stato di polarizzazione individuale iniziale (diremo che è un'aleatorietà non epistemica) ma sappiamo che il test eseguito su uno è sufficiente a fornirci il pronostico esatto sull'altro. E questo è *entanglement* quantistico.

Referenze

G. C. Ghirardi, "Un'occhiata alle carte di Dio", Il Saggiatore, ed. 2015
J.J. Sakurai, "Meccanica quantistica moderna", Zanichelli, 1996