Il segnale MLS

Luca Alfinito, 2010-2020

1. Introduzione

Consideriamo un sistema con risposta lineare, e sia *x(t)* la sollecitazione acustica inviata all'altoparlante per l'immissione nell'ambiente. Per la sola ipotesi di linearità ammetteremo per ogni punto ricevitore l'esistenza di una propria funzione di trasferimento *h* tale che il segnale ricevuto sia:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt' = x * h(t)$$

Eq. 1-1

L'operazione sopra riportata è chiaramente una convoluzione, e le proprietà della trasformata di Fourier assicurano la commutatività dell'operatore:

$$\Im[y(t)] = \Im\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt'\right] = \Im[x(t)]\cdot\Im[h(t)] = \Im[h(t)]\cdot\Im[x(t)] = \Im\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t')x(t-t')dt'\right]$$

Eq. 1-2

Tale risultato è conseguibile anche mediante un semplice cambio di variabile di integrazione.

Se ammettiamo anche la causalità del sistema, questa si traduce nell'annullamento di *h* per argomenti minori di zero, che ci permette di modificare l'estremo superiore dell'integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')h(t-t')dt'$$

Eq. 1-3

Al tempo *t* contribuiscono tutti i valori passati del segnale in ingresso, ciascuno con diverso peso, tendente a zero all'aumentare della distanza temporale dall'istante di studio *t*.

$$\lim_{t-t' \to +\infty} h(t-t') = 0$$

Eq. 1-4

Traduciamo tutto in segnali discreti. Avremo, con ovvio significato dei simboli ed esplicitando la sommatoria:

$$y_i = \sum_j x_j h_{i-j}$$

Eq. 1-5

Supponiamo adesso di effettuare una cross-correlazione del tipo:

$$y * w = x * h * w = h * x * w$$

Eq. 1-6

Dove abbiamo usato ancora la proprietà di commutatività. Omettendo la sommatoria (somma sugli indici uguali):

$$y_j w_{i-j} = h_k x_{j-k} w_{i-j}$$

Eq. 1-7

Si tratta allora di sfruttare la proprietà associativa e scegliere il segnale *w* tale che l'autocorrelazione con l'ingresso *x* sia quanto più possibile approssimabile da una δ. In altre parole, stiamo cercando due segnali completamente scorrelati. Nella situazione ideale avremmo infatti:

$$y * w = h * (N\delta) = Nh$$

Eq. 1-8

In cui *N* è un fattore di normalizzazione. Questo ci è possibile ad esempio se *x* e *w* rappresentano lo stesso rumore bianco, ma risulta più utile ai nostri scopi utilizzare un tipo di segnale periodico (di periodo *P*) noto come Maximum Length Sequence (MLS), la cui autocorrelazione calcolata su un periodo e normalizzata vale:

$$A_l = \frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1} x_k x_{l-k} = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ -1/P & l \neq 0 \end{cases} \approx \delta_{l+k-l} = \delta_l$$

Eq. 1-9

Utilizziamo allora la sequenza backward:

$$w_i = x_{-i}$$

Eq. 1-10

In questo modo:

$$h'_i = y_j w_{i-j} = h_k \left(x_{j-k} w_{i-j}\right) = h_k \left(x_{j-k} x_{j-i}\right) \approx h_k \sum_n \delta_{(j-i)-(j-k)+nP} = h_k \sum_n \delta_{k-i+nP} = \sum_n h_{i-nP}$$

Eq. 1-11

Abbiamo quindi ottenuto una replica periodica della funzione di trasferimento iniziale *h*, nell'ipotesi in cui abbiamo scelto *P* più grande del tempo che *h* impiega ad annullarsi. Inoltre scegliendo un adeguato periodo è possibile raggiungere il grado di approssimazione desiderato per l'autocorrelazione, il tutto a supporto della necessità di selezionare, come vedremo, un adeguato valore dell'*ordine* della sequenza.

Il risultato precedente può essere ottenuto mediante l'applicazione di un operatore lineare:

$$h'_i = W_{ij} y_j \qquad W_{ij} = x_{j-i}$$

Eq. 1-12

Considerando ad esempio un periodo *P*=7 si ha:

$$\begin{pmatrix} h'_0 \\ h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \\ h'_4 \\ h'_5 \\ h'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_6 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_5 & x_6 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

Eq. 1-13

L'espressione precedente può richiedere tempi di calcolo abbastanza lunghi: un interprete Python su un PC di prestazioni medie può impiegare circa 1 ora per una singola sequenza MLS di ordine 16. Per questo motivo è possibile ricorrere ad algoritmi come la Fast Hadamard Transform.

2. La costruzione della sequenza

Per costruire una sequenza idonea al nostro scopo lavoriamo in $\boldsymbol{Z}_2$, cioè l'insieme delle classi di resto dei numeri interi con divisore 2: le classi saranno [0] e [1], rispettivamente i numeri pari e dispari. Omettendo le parentesi, il vantaggio di lavorare in $\boldsymbol{Z}_2$ risiede nel fatto che la somma o la sottrazione di due classi equivale all'operazione logica di "OR ESCLUSIVO" (XOR):

$$a, b \in Z_2 \quad \Rightarrow \quad a + b = a - b = a \text{ XOR } b$$

Eq. 2-1

DEFINIZIONE. Un polinomio *p* di ordine *N* si dice:

- ✓ *primitivo* se il massimo comune divisore dei suoi coefficienti non nulli è 1 (quindi sempre in $\boldsymbol{Z}_2$),
- ✓ *irriducibile* se non può essere fattorizzato (scomposto in prodotto di polinomi di ordine inferiore).

Consideriamo dunque un polinomio *p* di ordine *n*, a coefficienti in $\boldsymbol{Z}_2$, che sia primitivo e irriducibile e scriviamolo nella forma:

$$p = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} x^{n-i}$$

Eq. 2-2

Tale polinomio induce nell'anello dei polinomi **A** una ripartizione in 2^N-1 classi di resto non nulle rispetto alla divisione per *p* che godono di un'interessante proprietà: esiste almeno una classe detta *generatore* che permette di passare da una classe all'altra, mediante applicazione ripetuta di se stesso (coprendo tutte le classi ad eccezione del polinomio nullo):

$$[g]\in A/p: \quad \forall [h]\in A/p \quad \exists r \text{ t.c. } [h]=[g^r]$$

Eq. 2-3

L'applicazione del piccolo teorema di Fermat al caso specifico (il polinomio p è primitivo) porta all'esistenza di un generatore tale che su un periodo *P*:

$$[g^P]=[g]$$

Eq. 2-4

L'idea per costruire una sequenza è dunque quella di utilizzare un generatore in *A/p* per passare da una classe all'altra, considerare per ogni passaggio la *n-upla* di coefficienti propri del polinomio rappresentativo della classe, e scegliere sempre il coefficiente alla stessa posizione.

In pratica si utilizza la mappatura dell'insieme $A[Z_2]/p$ mediante Z_2^n:

$$A[Z_2]/p \xleftrightarrow{\tau} Z_2^n = \overbrace{Z_2 \times Z_2 \times \ldots \times Z_2}^{n\, volte}$$

Eq. 2-5

Consideriamo ad esempio il caso *n*=3 e il polinomio irriducibile (e sempre definito in $\boldsymbol{Z_2}$):

$$p(x)=x^3+x+1$$

Eq. 2-6

Potremo usare come generatore la classe [*x*]. Mostriamo in questo caso banale i passi per la generazione di tutte le classi:

Step	Polinomio rappresentativo classe	Equivalente in Z_2^n	Risultato (nell'anello **A**) della moltiplicazione per il generatore *x*	Polinomio corrispondente in **A/p** al risultato ottenuto	Equivalente in Z_2^n
1	1	001	x	x	010
2	x	010	x^2	x^2	100
3	x^2	100	x^3	$x+1$	011
4	$x+1$	011	x^2+x	x^2+x	110
5	x^2+x	110	x^3+x^2	x^2+x+1	111
6	x^2+x+1	111	x^3+x^2+x	x^2+1	101
7	x^2+1	101	x^3+x	1	001

Per selezionare poi il coefficiente corrispondente ad una data posizione *y*, si introduce il proiettore Π:

$$\Pi^{(y)} : Z_2^n \to Z_2 \qquad \Pi^{(y)}(b_{n-1}b_{n-2}...b_1 b_0) = b_y$$

Eq. 2-7

Per definizione il proiettore gode delle seguenti proprietà di linearità:

$$a\Pi^{(y)}(...b_y...) = \Pi\{a\cdot(...b_y...)\}, \qquad \Pi^{(y)}\sum \ = \sum \ \Pi^{(y)}$$

Eq. 2-8

Passiamo dunque alla definizione di una speciale sequenza (ciclica in virtù delle proprietà del generatore). Se si considerano una classe di partenza assegnata *q*, appartenente a *A/p*, e un generatore *g*:

$$s_k = \Pi^{(y)}\left(\tau\left[q\cdot g^k\right]\right)$$

Eq. 2-9

In cui la *τ* corrisponde a passare dalla classe rappresentativa in *A/p* all'equivalente *n-upla* di coefficienti in Z_2, poi si proietta con *Π* (scegliendo sempre la posizione *y*-esima). Si tratta di una notazione rigorosa che può essere semplificata, ricordando che la *N-upla* rappresenta l'insieme dei coefficienti applicati alle potenze della variabile polinomiale.

<u>**TEOREMA** (di costruzione della sequenza):</u>

Sia dato il polinomio primitivo irriducibile $p = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}x^{n-i} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Se si costruisce la sequenza come descritto nella [Eq. 2-9] allora vale la seguente proprietà:

$$s_{k+n} = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}s_{k+n-i}$$

Che può anche essere riscritta, con riscrittura degli indici:

$$\boxed{s_k = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}s_{k-i}}$$

Eq. 2-10

Tale costruzione è analoga alla procedura di *shift register* con numero di celle pari a *n* (framework cosiddetto di Fibonacci) utilizzando il seguente criterio:

$$s_{k+n} = a_{n-1}s_{k+n-1}\text{XOR}\ldots\text{XOR}\, a_1 s_{k+1}\text{XOR}\; a_0 s_k$$

O equivalentemente:

$$s_k = a_{n-1}s_{k-1}\text{XOR}\ldots\text{XOR}\, a_1 s_{k-n+1}\text{XOR}\; a_0 s_{k-n}$$

Eq. 2-11

Dimostrazione.

Per prima cosa omettendo di esplicitare l'isomorfismo τ mostriamo che, anche nell'ipotesi di ignorare la configurazione di partenza (individuata da q):

$$\left[q \cdot g^{k+n}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[q \cdot g^{k+n-i}\right]$$

Eq. 2-12

Per questo scopo lavoriamo per induzione e supponiamo che sia valida per un certo k, per poi verificare se rimane corretta anche per $k+1$. Possiamo sfruttare le proprietà del prodotto tra classi per eliminare q.

$$\left[g^{k+n}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[g^{k+n-i}\right]$$

Eq. 2-13

Moltiplichiamo adesso per il generatore g ambo i membri:

$$\left[g^{k+n+1}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[g^{k+n-i+1}\right]$$

Eq. 2-14

Cambiando l'ordine agli esponenti:

$$\left[g^{(k+1)+n}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[g^{(k+1)+n-i}\right]$$

Eq. 2-15

Che prova l'uguaglianza anche per l'elemento $k+1$.

Mostriamo allora che esiste almeno un k tale da soddisfare la relazione a base del teorema. Considerando ad esempio k=0 si deve verificare che:

$$\left[g^{n}\right] \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[g^{n-i}\right]$$

Eq. 2-16

Dimostriamo la seguente cosa in modo euristico considerando il caso più utile ai nostri scopi. Si consideri al solito un polinomio primitivo e irriducibile di ordine n e il generatore $g=[x]$.

Se vogliamo individuare la classe di resto di $x^n=[g^n]$ è sufficiente eseguire la divisione di polinomi (in $\boldsymbol{Z}_2$):

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
x^n & 0 & 0 & \dots & 0 & x^n & a_{n-1}x^{n-1} & a_{n-2}x^{n-2} & \dots & a_0 \\
\cline{6-10}
x^n & a_{n-1}x^{n-1} & a_{n-2}x^{n-2} & \dots & a_0 & 1 \\
\cline{1-10}
0 & a_{n-1}x^{n-1} & a_{n-2}x^{n-2} & \dots & a_0
\end{array}
$$

Eq. 2-17

Che dimostra quanto cercato.

L'uguaglianza [Eq. 2-12] si applica quindi anche ai proiettori:

$$\Pi\left[q \cdot g^{k+n}\right] = \Pi \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[q \cdot g^{k+n-i}\right]$$

Eq. 2-18

Per le proprietà del proiettore si ha:

$$\Pi \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\left[q \cdot g^{k+n-i}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} \Pi\left[q \cdot g^{k+n-i}\right] =$$

Eq. 2-19

Dunque:

$$\Pi\left[q \cdot g^{k+n}\right] = s_{k+n} = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} \Pi\left[q \cdot g^{k+n-i}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} s_{k+n-i}$$

Eq. 2-20

Che in $\boldsymbol{Z}_2$ si traduce in una ripetizione di algoritmi di XOR. Fondamentale per la costruzione della sequenza è l'aver utilizzato l'algebra dei generatori di un anello di polinomi quozientato ad un polinomio primitivo irriducibile, rendendo possibile l'applicazione del piccolo teorema di Fermat secondo cui, nella cosiddetta "algebra dell'orologio", se p è primo allora:

$$\left[a^p\right] = [a] \quad (\text{mod } p)$$

Eq. 2-21

3. Il segnale MLS

Il segnale MLS (*Maximum Length Sequence*) è anche noto in letteratura come *Pseudo-Noise Sequence*, maximal-length shift-register sequence o m-sequence [ref 2]. Il segnale MLS è costituito da una sequenza di *-1* e *1*, e costruito a partire dalla sequenza [s_i] mediante il criterio:

$$m_k = (-1)^{s_k}$$

Eq. 3-1

In questo modo si ha la corrispondenza:

$$(0,1) \xrightarrow{m} (1;-1)$$

Eq. 3-2

Controlliamo dunque se il segnale MLS così definito verifica le buone proprietà che ci servivano verificando ad esempio l'autocorrelazione su un periodo.

$$A_l = m_k m_{l+k} = \sum_{k=0}^{P-1} (-1)^{s_k} (-1)^{s_{k+l}}$$

Eq. 3-3

da cui deriva immediatamente che per *l=0* si ha:

$$A_0 = m_k m_{0+k} = \sum_{k=0}^{P-1} (-1)^{2s_k} = P$$

Eq. 3-4

Il caso *l* non nullo può essere calcolato facendo ricorso alla definizione della sequenza mediante applicazione ricorsiva del generatore di polinomi e del proiettore:

$$A_l = m_k m_{l+k} = \sum_{k=0}^{P-1} (-1)^{\Pi(g_k q)} (-1)^{\Pi(g_{k+l} q)}$$

Eq. 3-5

in cui *q* rappresenta il polinomio che dipende dalla configurazione iniziale della sequenza. Per la linearità del proiettore:

$$A_l = m_k m_{l+k} = \sum_{k=0}^{P-1} (-1)^{\Pi[q(g_k + g_{k+l})]} = \sum_{k=0}^{P-1} (-1)^{\Pi[g_k (1+g_l) q]} =$$

Eq. 3-6

Nella formula precedente il fattore *(1+*g_l*)q* può essere ancora pensato come un polinomio di partenza (rinominato p_0), in quanto *l* è fissato. Ogni elemento della somma presenta l'applicazione del generatore pari ad un numero *k* di volte con *k* da 0 a *L-1*, in modo da spazzare tutti i polinomi del quoziente (diremo che l'orbita del generatore è l'intero anello quoziente, ad esclusione della classe [0]). In definitiva la [Eq. 3-6] rappresenta la somma di *L* potenze di -1, ciascuna avente per esponente un determinato valore della sequenza:

$$A_l = m_k m_{l+k} = \sum_{polinomi \in A/p} (-1)^{\Pi[g_k p_0]}$$

Eq. 3-7

Dal momento che come già detto esclusa dal conteggio la classe [0], ci si aspetta che il numero di 1 della sequenza *s* sia superiore al numero di 0 di un'unità, come ci conferma ad esempio il caso n=3:

Equivalente in $Z_2^{n=3}$
010
100
011
110
111
101
001

Di conseguenza, il risultato della somma su un periodo sarà pari a:

$$A_l = m_k m_{l-k} = \sum^{Y}(-1)^1 + \sum^{Y-1}(-1)^0 = -1, \qquad P = 2Y + 1$$

Eq. 3-8

In definitiva, l'autocorrelazione calcolata su un periodo *L* e normalizzata della sequenza MLS è:

$$A_l = \frac{1}{P}\sum_{k=0}^{P-1} m_k m_{l+k} = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ -1/P & l \neq 0 \end{cases}$$

Eq. 3-9

Che dimostra come la sequenza stessa sia dotata delle proprietà necessarie per la sua applicazione nel campo della caratterizzazione della risposta all'impulso.

Una dimostrazione più raffinata dell'autocorrelazione della sequenza si trova in [ref 3].

Bibliografia

[1] Jens Hee, “Impulse response measurement using MLS”,2003

[2] Timo Peltonen, “A Multichannel Measurement System for Room Acoustics Analysis”, Thesis of Helsinki University of Technology

[3] S. W. Golomb, "Shift-register sequences", Aegean Park, 1982