

Perché la rinormalizzazione? Parte 1

Luca Alfinito, febbraio 2021

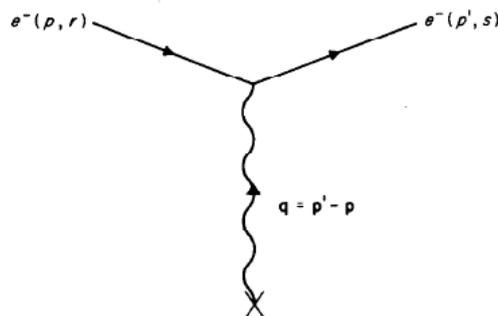
1. Introduzione

Nella celebre fiaba “I vestiti dell’imperatore” di Andersen due sarti truffatori convincono il monarca di poter realizzare un vestito con una stoffa visibile solo alle persone intelligenti. Commissionato allora l’abito e riscosso il lauto anticipo i due fingono di lavorare, mettendosi all’opera su un telaio che però è ovviamente vuoto. Giunto finalmente il giorno della sfilata, nessun cortigiano ammette di non riuscire a vedere l’abito, così tutti attribuiscono all’imperatore un vestito che lui effettivamente non sta indossando. Tutti al di fuori di un bambino, che rivela questa verità già in realtà condivisa dalla corte: il re è nudo.

L’idea della rinormalizzazione è quella di mettersi dal punto di vista di quel bambino, e riprendere consapevolezza che quell’abito è solo un’apparenza, non è un abito vero anche se comunque tutti lo attribuiscono al re. Nel caso dell’elettrodinamica quantistica il vestito è il valore che assume la costante di struttura fine (quindi la carica “osservabile” di un elettrone) a grandi distanze di interazione, mentre il nostro obiettivo è riconoscere come la carica “nuda”, “reale”, viene nascosta, vestita da coppie virtuali che si creano attorno alla carica originaria. E ci renderemo conto di come accettare in un certo senso questa truffa permetta di eliminare alcune quantità infinite che ci impedirebbero di lavorare con la teoria perturbativa in QED.

2. Il caso di studio: lo scattering di Rutherford

Il punto di partenza è considerare lo scattering di un elettrone da sorgente fissa come ad esempio un nucleo, anche noto come Rutherford scattering. Il relativo diagramma di Feynman è:



Questo processo è veicolato dall’interazione tra quadricorrente elettronica e fotone (quadri potenziale elettromagnetico), che definisce il vertice di QED. La relativa ampiezza è data, all’ordine descritto in figura, da:

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_{\mu}^{fi}(x) A^{\mu}(x)$$

Eq. 2-1

Ovviamente con la definizione di corrente elettronica:

$$j_{\mu}^{fi} = -e\bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i e^{-iqx}$$

Eq. 2-2

Considerando la trasformata di Fourier del quadripotenziale:

$$A^{\mu}(q) = \int d^4x e^{-iqx} A^{\mu}(x) = 2\pi\delta(E_i - E_f) \int d^3x e^{i\vec{q}\vec{x}} A^{\mu}(\vec{x})$$

Eq. 2-3

Dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che per una sorgente statica il quadrivettore non dipende dal tempo. L'ampiezza di transizione diventa, nello spazio degli impulsi:

$$T_{fi} = -ie\bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i A^{\mu}(q)$$

Eq. 2-4

Per le proprietà di campo conservativo si ha $0=q_0=E_f-E_i$. Inoltre sappiamo che in condizioni di campo statico l'equazione di Maxwell del potenziale assume la forma:

$$\nabla^2 A^{\mu}(\vec{x}) = -j^{\mu}(\vec{x})$$

Eq. 2-5

In cui j rappresenta la sorgente del nostro campo esterno. Nel passaggio in trasformata:

$$\int d^3x e^{i\vec{q}\vec{x}} \nabla^2 A^{\mu}(\vec{x}) = -j^{\mu}(\vec{q})$$

Eq. 2-6

Si può integrare due volte per parti ottenendo:

$$-j^{\mu}(\vec{q}) = \int d^3x A^{\mu}(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\vec{x}}) = -|\vec{q}|^2 \int d^3x A^{\mu}(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} = -|\vec{q}|^2 A^{\mu}(\vec{q})$$

Eq. 2-7

Che in definitiva porta a scrivere:

$$A^{\mu}(\vec{q}) = \frac{j^{\mu}(\vec{q})}{|\vec{q}|^2}$$

Eq. 2-8

Riassemblando il tutto:

$$T_{fi} = i2\pi\delta(E_i - E_f) e\bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i \frac{j^{\mu}(\vec{q})}{|\vec{q}|^2}$$

Eq. 2-9

L'ampiezza covariante è parte dell'ampiezza T a meno della funzione delta:

$$-iM = ie\bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{j^\mu(\vec{q})}{|\vec{q}|^2}$$

Eq. 2-10

E ricordando che nel nostro caso: $q^2 = 0 - |\vec{q}|^2 = -|\vec{q}|^2$ si può riscrivere:

$$-iM = ie\bar{u}_f \gamma_\mu u_i \frac{j^\mu(\vec{q})}{|\vec{q}|^2} = (ie\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ij^\nu(\vec{q}))$$

Eq. 2-11

Per un nucleo fisso di carica Ze all'origine, nel sistema del laboratorio la sorgente diventa:

$$j^0(\vec{x}) = Ze\delta(\vec{x}) \quad j^i(\vec{x}) = 0$$

Eq. 2-12

Pertanto:

$$-iM = (ie\bar{u}_f \gamma_0 u_i) \left(\frac{-i}{q^2} \right) (-iZe)$$

Eq. 2-13

Ricordando che:

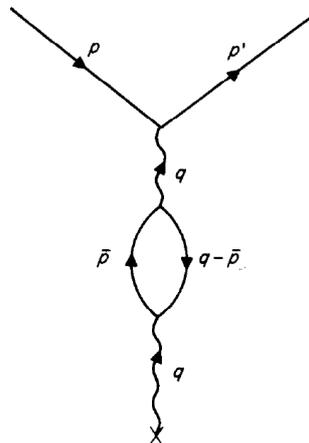
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |M|^2$$

Eq. 2-14

Si conviene che l'elemento considerato fornisce la sezione d'urto $O(\alpha^2)$, ossia e^4 .

3. Correzioni di ordine superiore: la self-energia del fotone

Introduciamo adesso la correzione ad un loop che coinvolga la produzione e la successiva annichilazione di una coppia $e^+ e^-$, secondo lo schema:



Poiché l'impulso della coppia non è osservabile, per il calcolo dell'ampiezza deve essere operata la somma (integrale) su tutti gli impulsi possibili; inoltre deve essere aggiunto un fattore -1 che le regole di Feynman prevedono per ogni loop introdotto. In definitiva si ha:

$$\begin{aligned}
 -iM^{(2)} &= (-1)^1 (ie\bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i) \left(\frac{-ig_{\mu\mu'}}{q^2} \right) \cdot \\
 &\cdot \left\{ \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} (ie\gamma^{\mu'})_{\alpha\beta} \frac{i(\bar{p} + m)_{\beta\lambda}}{\bar{p}^2 - m^2} (ie\gamma^{\nu'})_{\lambda\tau} \frac{i(\bar{p} - q + m)_{\tau\alpha}}{(\bar{p} - q)^2 - m^2} \right\} \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{-ig_{\nu'\nu'}}{q^2} \right) (-ij^{\nu}(\bar{q}))
 \end{aligned}$$

Eq. 3-1

L'aggiunta di questo termine correttivo all'ampiezza covariante può essere considerata come una modifica del propagatore del tipo:

$$\begin{aligned}
 \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} &\rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \left(\frac{-ig_{\mu\mu'}}{q^2} \right) I^{\mu'\nu'} \left(\frac{-ig_{\nu'\nu'}}{q^2} \right) \\
 I_{\mu'\nu'} &= (-1)^1 \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(ie\gamma_{\mu'}) \frac{i(\bar{p} + m)}{\bar{p}^2 - m^2} (ie\gamma_{\nu'}) \frac{i(\bar{p} - q + m)}{(\bar{p} - q)^2 - m^2} \right]
 \end{aligned}$$

Eq. 3-2

Ed è qui che si verifica il problema: l'integrale diverge, in quanto contiene contributi del tipo:

$$\int \frac{\bar{p}^3 d\bar{p}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\bar{p}^2}$$

Eq. 3-3

4. Regolarizzazione

Occorre quindi una certa manipolazione preliminare, chiamata *regolarizzazione*, che nell'approccio scelto in questa trattazione [2] può consistere nel modificare la dimensionalità di un integrale per farlo diventare finito, passando da 4 a D dimensioni. Nel caso D-dimensionale il tensore metrico di Lorentz (spazio piatto) assume quindi i seguenti valori sulla diagonale:

$$g_{00} = -g_{ii} = 1 \quad i = 1, \dots, D-1$$

Eq. 4-1

Conseguentemente il modulo di un D-vettore sarà:

$$k^2 = (k^0)^2 - \sum_1^{D-1} (k^i)^2$$

Eq. 4-2

In questo schema è possibile mostrare che ('t Hooft e Veltman):

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}$$

Eq. 4-3

Dove si è introdotta la funzione di Eulero. Per valori non interi di D, la parte destra è ben definita e non diverge. Si considera allora una dimensionalità non intera $D-\eta$, per poi recuperare la corretta dimensione 4 operando il limite su η tendente a 0. Per completare la ricetta si deve anche introdurre un fattore di scala massivo κ cosicché, ad esempio per $n=2$, si possa valutare il seguente integrale, che si rivelerà utile ai fini della rinormalizzazione:

$$\Pi_\eta(s) = \kappa^\eta \int \frac{d^{4-\eta} k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^2} = i\pi^{(4-\eta)/2} (-1)^2 \frac{\Gamma(2 - (4-\eta)/2)}{\Gamma(2)} \frac{\kappa^\eta}{s^{2-(4-\eta)/2}} = i\pi^2 \frac{\Gamma(\eta/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{\pi s}{\kappa^2}\right)^{-\eta/2}$$

Eq. 4-4

Ovviamente i risultati fisici ottenuti nel passaggio al limite dovranno essere indipendenti dal fattore di scala massivo introdotto *ad hoc*. Si utilizzano adesso lo sviluppo in serie:

$$x^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2} \ln x + \dots \Rightarrow \left(\frac{\pi s}{\kappa^2}\right)^{-\eta/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi s}{\kappa^2}\right)$$

Eq. 4-5

E l'approssimazione ($\gamma=0.5772$ è la costante di Eulero):

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots$$

Eq. 4-6

Come ultimo ingrediente aggiungiamo l'integrale parametrico di Feynman, facilmente dimostrabile:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b - (a-b)z]^2}$$

Eq. 4-7

Con gli strumenti appena introdotti è possibile calcolare l'integrale, ridefinito in analogia alla notazione di Mandl-Shaw [2]:

$$ie^2 \Pi_{\mu'\nu'} = I_{\mu'\nu'} = \frac{-e^2 \kappa^{4-D}}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(ie\gamma_{\mu'}) \frac{i(\bar{p} + q + m)}{(\bar{p} + q)^2 - m^2} (ie\gamma_{\nu'}) \frac{i(\bar{p} + m)}{\bar{p}^2 - m^2} \right]$$

Eq. 4-8

Si arriva, dopo parecchi passaggi che mi riservo di verificare [2, pag. 230] a:

$$I_{\mu'\nu'} = -ig_{\mu'\nu'} q^2 \left\{ \frac{\alpha}{3\pi} \int_{-m^2}^{\infty} \frac{d\bar{p}^2}{\bar{p}^2} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \log \left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) \right\} + B(q^2) q_{\mu'} q_{\nu'} = -ig_{\mu'\nu'} q^2 I(q^2)$$

Eq. 4-9

In cui m è la massa dell'elettrone (anche sulla quale dovrà essere spesa più di una parola, ma in occasione della correzione al vertice (self-energia dell'elettrone). Il secondo termine si annulla quando il propagatore è accoppiato a cariche esterne o correnti. Vediamo che adesso la divergenza è logaritmica e interessa il primo termine tra parentesi graffe: per adesso introduciamo un termine di cut-off M . Valutiamo allora cosa succede per piccoli e grandi impulsi $-q^2$.

$$I(q^2) \approx \begin{cases} \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{M^2}{m^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} & \text{piccoli } -q^2 \\ \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{M^2}{-q^2} & \text{grandi } -q^2 \end{cases}$$

Eq. 4-10

Qual è l'implicazione di questi due casi? Nel limite di piccoli impulsi, ossia quando l'elettrone non subisce uno scattering significativo perché a grande distanza dal nucleo, si può scrivere:

$$\begin{aligned} -iM &= (ie\bar{u}_f \gamma_0 u_i) \left(\frac{-i}{q^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{M^2}{m^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + O(e^4) \right) (-iZe) = \\ &= (ie_R \bar{u}_f \gamma_0 u_i) \left(\frac{-i}{q^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} \right) (-iZe) \end{aligned}$$

Eq. 4-11

Dove si è posto:

$$e_R = e \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{M^2}{m^2} \right)^{1/2}$$

Eq. 4-12

Questo è il fulcro della rinormalizzazione: è e_R non e la carica che viene misurata in uno scattering di Thompson o con un altro esperimento Coulombiano a lungo raggio. Pertanto per questo tipo di esperimenti va benissimo considerare:

$$\frac{e_R^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$$

Eq. 4-13

implicitamente inglobando i contributi che mascherano la vera apparenza nuda della carica.

Ovviamente, quando invece si tratta di andare "in profondità" si scopre che la schermatura della carica che si verifica in QED viene progressivamente meno, in favore dell'emersione degli infiniti che abbiamo visto celarsi ad esempio dentro all'argomento del logaritmo.

Ma soprattutto è possibile scrivere tutte le quantità in funzione della carica "fisica", il presunto vestito che viene cucito addosso al re nudo del racconto introduttivo.

Nota. Discorso diametralmente opposto per un'interazione non abeliana come la QCD, per cui appunto la possibilità di vertici di soli bosoni di interazione ha per effetto un progressivo annullamento ad alte energie della carica nuda di colore, per cui si parla in quest'ultimo caso di "libertà asintotica".

Referenze

- [1] F. Halzen, A. D. Martin, Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics, Wiley & Sons, 1984
- [2] F. Mandl, G. Shaw, "Quantum Field Theory – Revised Edition", Wiley and Sons Ltd, 1984