Curvatura dello spazio-tempo e 2-forme di Cartan

Luca Alfinito, maggio-giugno 2020/settembre 2021

Il tensore di curvatura di Riemann ha 4 indici ma solo 21 componenti indipendenti. Mostriamo come secondo la formulazione di Cartan la rappresentazione della curvatura può essere resa utilizzando i concetti di forme differenziali e derivata esterna. Nella presente trattazione sarà riproposto l'approccio di Wheeler [1].

1. Costruzione di 1-forme a partire da tensori

Ricordando che la derivata esterna è antisimmetrica, essa produce una *k+1*-forma a partire da oggetto tensoriale del tipo (*n,k*). Possiamo quindi partire dal più semplice oggetto tensoriale, ossia uno scalare funzione del punto (spaziotemporale). Da uno scalare possiamo allora ricavare una 1-forma (che diremo: *scalar-valued 1-form*, secondo la definizione ad esempio riportata in [1]) semplicemente considerando:

$$\mathbf{d}f = f_{,\alpha}\boldsymbol{\omega}^{\alpha}$$

Eq. 1-1

In cui pensiamo di utilizzare una base duale coordinata. In modo del tutto analogo possiamo creare una *vector-valued 1-form* a partire da un campo 4-vettoriale:

$$\mathbf{dv} = \mathbf{v}_{,\alpha}\boldsymbol{\omega}^{\alpha} = \nabla\mathbf{v}$$
$$\langle \mathbf{dv}, \mathbf{u} \rangle = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$$

Eq. 1-2

Si può quindi riprendere la medesima notazione per ogni tensore generico **S** del tipo (*n,0*), ossia costruito come prodotto tensoriale di *n* vettori e nessuna 1-forma:

$$\mathbf{dS} = \nabla\mathbf{S}$$

Eq. 1-3

Osserviamo per prima cosa che, se α è una *p*-form e *β* è una *q*-form:

$$\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathbf{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p}\alpha \wedge (\mathbf{d}\beta)$$

Eq. 1-4

Pertanto analogamente si avrà, nel caso di un tensore generico contenente una p-forma (*tensor-valued p-form*) **S**:

$$\mathbf{d}(\mathbf{S} \wedge \beta) = (\mathbf{dS}) \wedge \beta + (-1)^{p}\mathbf{S} \wedge (\mathbf{d}\beta)$$

Eq. 1-5

Un altro risultato cruciale è:

$$\mathbf{d}^2\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} = 0$$

Eq. 1-6

Quanto riportato è evidente per una forma base, utilizzando il teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine della derivata, e ricordando l'antisimmetria della derivata esterna.

La proprietà espressa è quindi applicabile per il caso di *tensor-valued k-forms*. Ad esempio nel caso di 2-forma:

$$\mathbf{S} = S^{\alpha\beta}_{|\gamma\delta|}\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}\mathbf{d}x^{\gamma} \wedge \mathbf{d}x^{\delta} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dS} = \mathbf{d}\left(\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}S^{\alpha\beta}_{|\gamma\delta|}\right) \wedge \mathbf{d}x^{\gamma} \wedge \mathbf{d}x^{\delta}$$

Eq. 1-7

In cui l'espressione i segmenti orizzontali indicano che la somma è ristretta ai valori degli indici per cui $\Upsilon<\delta$. Come ultimo esempio vediamo (avendo anche in questo caso omesso il simbolo di prodotto tensoriale):

$$\mathbf{d}(\mathbf{u}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{du}) \wedge \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma})$$

Eq. 1-8

L'ultima relazione è automaticamente verificata considerando che un vettore **u** è una *0-form*, da cui *p=0* nella Eq. 1-4.

2. Derivata seconda antisimmetrica di un vettore

Forti degli strumenti introdotti fin qui, consideriamo un generico vettore:

$$\mathbf{w} = w^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}$$

Eq. 2-1

Ricordiamo la definizione "operativa" dei coefficienti di connessione, da utilizzare nel trasporto parallelo:

$$\nabla_{\mathbf{e}_{\mu}}\mathbf{e}_{\alpha} = \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\mu}\mathbf{e}_{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{de}_{\alpha} = \nabla\mathbf{e}_{\alpha} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}\boldsymbol{\omega}^{\nu}\mathbf{e}_{\rho} := \Omega^{\rho}_{\alpha}\mathbf{e}_{\rho}$$

Eq. 2-2

In cui è stata introdotta la *1-form*:

$$\Omega^{\rho}_{\alpha} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}\boldsymbol{\omega}^{\nu}$$

Eq. 2-3

Che porta all'espressione compatta per un gradiente di un vettore (ossia ad una *vector-valued 1-form*):

$$\begin{aligned}
\mathbf{dw} &= \mathbf{d}\left(w^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}\right) = \left(\mathbf{d}w^{\alpha}\right)\mathbf{e}_{\alpha} + w^{\alpha}\left(\mathbf{de}_{\alpha}\right) = \\
&= \mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{d}w^{\alpha} + w^{\alpha}\Omega^{\rho}_{\alpha}\mathbf{e}_{\rho} = \\
&= \mathbf{e}_{\alpha}\left(\mathbf{d}w^{\alpha} + w^{\nu}\Omega^{\alpha}_{\nu}\right)
\end{aligned}$$

Eq. 2-4

Che esprime tale vector valued 1-form in modo compatto[1]. La relativa derivata seconda antisimmetrica si calcola allora:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{d}^2\mathbf{w} = \mathbf{ddw} = \mathbf{d}\left\{\mathbf{e}_\alpha\left(\mathbf{d}w^\alpha + w^\nu\Omega^\alpha_\nu\right)\right\} = \mathbf{de}_\alpha \wedge \left(\mathbf{d}w^\alpha + w^\nu\Omega^\alpha_\nu\right) + \mathbf{e}_\alpha\left(\underbrace{\mathbf{dd}w^\alpha}_{=0} + \mathbf{d}\left(w^\nu\Omega^\alpha_\nu\right)\right) = \\
&= \Omega^\rho_\alpha\mathbf{e}_\rho \wedge \left(\mathbf{d}w^\alpha + w^\nu\Omega^\alpha_\nu\right) + \mathbf{e}_\alpha\left(\mathbf{d}w^\nu \wedge \Omega^\alpha_\nu + w^\nu\mathbf{d}\Omega^\alpha_\nu\right) = \\
&= \mathbf{e}_{\underset{\mu}{\underset{\updownarrow}{\rho}}}\Omega^\rho_\alpha \wedge \mathbf{d}w^\alpha + \Omega^\rho_\alpha\mathbf{e}_{\underset{\mu}{\underset{\updownarrow}{\rho}}} \wedge w^\nu\Omega^\alpha_\nu + \mathbf{e}_{\underset{\mu}{\underset{\updownarrow}{\alpha}}}\mathbf{d}w^\nu \wedge \Omega^\alpha_\nu + \mathbf{e}_{\underset{\mu}{\underset{\updownarrow}{\alpha}}}w^\nu\mathbf{d}\Omega^\alpha_\nu = \\
&= \mathbf{e}_\mu\left(\Omega^\mu_\alpha \wedge \mathbf{d}w^\alpha + \Omega^\mu_\alpha \wedge w^\nu\Omega^\alpha_\nu + \underbrace{\mathbf{d}w^\nu \wedge \Omega^\mu_\nu}_{-\Omega^\mu_\alpha \wedge \mathbf{d}w^\alpha} + w^\nu\mathbf{d}\Omega^\mu_\nu\right) = \\
&= \mathbf{e}_\mu w^\nu\left(\Omega^\mu_\alpha \wedge \Omega^\alpha_\nu + \mathbf{d}\Omega^\mu_\nu\right) = \mathbf{e}_\mu w^\nu\Re^\mu_\nu
\end{aligned}
$$

Eq. 2-5

In cui è stata introdotta la 2-forma di curvatura:

$$\Re^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\nu}} = \Omega^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\alpha}} \wedge \Omega^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{d}\Omega^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\nu}}$$

Eq. 2-6

Wheeler scrive a proposito che tale equazione "*surpasses in efficiency every other known method for calculating the curvature 2-forms*" [1, pag. 351]. È possible giungere ad un'equazione ancora più compatta introducendo la *tensor-valued 2-form*:

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{\mu}} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\nu}}\Re^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\nu}}$$

Eq. 2-7

(in cui la 1-forma con indice v accoglie il vettore **w**). Cosicché l'equazione finale di curvatura è banalmente:

$$\mathbf{d}^2\mathbf{w} = \mathbf{R}\,\mathbf{w}$$

Eq. 2-8

Per calcolare questa derivata seconda esterna è necessario definire il piano in cui tale derivata deve essere calcolata: tale piano è individuato appunto dai vettori, **u** e **v**, che vanno a saturare la 2-form di curvatura.

3. Relazione tra R e il tensore di Riemann

Per quanto segue è utile introdurre una proprietà della derivata esterna di una 1-forma (sia questa pure una *tensor-valued form*), che proprio in quanto 2-forma è tale da accettare due inserti vettoriali sotto la cosiddetta forma di "bivettore", che definiscono il piano su cui viene valutata la derivata seconda esterna:

---

[1] Ricordiamo comunque che nella forma estesa usuale:

$$\mathbf{dw} = \left(\mathbf{d}w^\alpha\right)\mathbf{e}_\alpha + w^\alpha\left(\Gamma^\rho_{\alpha\nu}\boldsymbol{\omega}^\nu\mathbf{e}_\rho\right) = w^\rho{}_{,\nu}\boldsymbol{\omega}^\nu\mathbf{e}_\rho + w^\alpha\Gamma^\rho_{\alpha\nu}\boldsymbol{\omega}^\nu\mathbf{e}_\rho$$

$$\langle \mathbf{d}\alpha, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \nabla_{\mathbf{u}}\langle \alpha, \mathbf{v}\rangle - \nabla_{\mathbf{v}}\langle \alpha, \mathbf{u}\rangle - \langle \alpha, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle$$

Eq. 3-1

Se dunque ***α=dw***:

$$\begin{aligned}&\langle \mathbf{d}^2\mathbf{w}, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{d}\alpha, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \nabla_{\mathbf{u}}\langle \alpha, \mathbf{v}\rangle - \nabla_{\mathbf{v}}\langle \alpha, \mathbf{u}\rangle - \langle \alpha, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \\ &= \nabla_{\mathbf{u}}\langle \mathbf{dw}, \mathbf{v}\rangle - \nabla_{\mathbf{v}}\langle \mathbf{dw}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{dw}, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \\ &= \nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}}\mathbf{w} = \left(\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}} - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\right)\mathbf{w}\end{aligned}$$

Eq. 3-2

che per chi è pratico di geometria della curvatura questo può suonare molto familiare: si tratta proprio dell'output previsto per il tensore di Riemann calcolato sui vettori **u**,**v** e **w**:

$$\langle \mathbf{d}^2\mathbf{w}, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \mathbf{Riemann}(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{w}$$

Eq. 3-3

Possiamo perciò concludere che:

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \mathbf{Riemann}(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

Eq. 3-4

ricordando allora la definizione del tensore di Riemann:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\nu}\langle \Re^{\mu}_{\nu}, \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\rangle = \mathbf{Riemann}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{\omega}^{\nu} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta}$$

Eq. 3-5

Se ne conclude la relazione tra le componenti indipendenti del tensore di Riemann e un certo numero di *2-form* rappresentanti la curvatura:

$$\Re^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\nu}} = R^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\nu}|\boldsymbol{\alpha\beta}|}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\alpha}}\wedge\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\beta}}$$

Eq. 3-6

Dalla costruzione ovviamente antisimmetrica si ricava che le 2-form, etichettate mediante gli indici μ e ν, sono in tutto sei (tanti quanti sono i piani costruiti da coppie indipendenti di vettori di una base nello spazio quadridimensionale).

4. Simmetria della derivata covariante e compatibilità con la metrica

Consideriamo, secondo l'idea di Cartan, un generico punto *P* e immaginiamo di esprimere **d***P* come la variazione in una direzione indefinita del punto *P* considerando un altro punto infinitamente vicino. **d***P* contiene uno "slot", funzionale ad indicare la direzione in cui avviene questo spostamento. Se **v** è il vettore tangente alla curva che esprime tale spostamento infinitesimo, si avrà per costruzione:

$$\langle \mathbf{d}P, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}$$

Eq. 4-1

Dunque la grandezza **d***P* è un tensore *(1,1)* ed è costruito:

$$\mathbf{d}P = \delta_{\nu}^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} \boldsymbol{\omega}^{\nu} = \mathbf{e}_{\mu} \boldsymbol{\omega}^{\mu}$$

Eq. 4-2

Vediamo adesso come due principi sono fondamentali nel calcolo della curvatura:

1. La simmetria della derivata covariante;
2. La compatibilità della derivata covariante con la metrica

In particolare la prima condizione è insita nel principio $\mathbf{d}^2 P=0$. Se sostituiamo il tensore Eq. 4-2 nell'Eq. 3-1 si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{d}^2 P, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \nabla_{\mathbf{u}} \langle \mathbf{d}P, \mathbf{v} \rangle - \nabla_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{d}P, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{d}P, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle = \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \end{aligned}$$

Eq. 4-3

Si conclude che l'annullarsi di $\mathbf{d}^2 P$ implica la simmetria della derivata covariante:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$$

Eq. 4-4

Il secondo principio è appunto la compatibilità della derivata covariante con la metrica, espressa nella forma:

$$\mathbf{d}(\cdot) = 0$$

Eq. 4-5

Dall'Eq. 4-2 si ricava:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}^2 P = \mathbf{d}(\mathbf{e}_{\mu} \boldsymbol{\omega}^{\mu}) = \mathbf{d}\mathbf{e}_{\mu} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\mu} + \mathbf{e}_{\mu} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^{\mu} = \\ &= \mathbf{e}_{\mu} \left(\Omega_{\nu}^{\mu} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu} + \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^{\mu} \right) \end{aligned}$$

Eq. 4-6

Che deve valere per ogni elemento della base vettoriale. Per questo motivo:

$$\Omega_{\nu}^{\mu} \wedge \boldsymbol{\omega}^{\nu} + \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}^{\mu} = 0$$

Eq. 4-7

Adesso calcoliamo:

$$\mathbf{d}g_{\mu\nu} = \mathbf{d}\left(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu\right) = \left(\mathbf{d}\mathbf{e}_\mu\right) \cdot \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu \cdot \left(\mathbf{d}\mathbf{e}_\nu\right) =$$
$$= \mathbf{e}_\alpha \Omega^\alpha_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\beta \Omega^\beta_\nu = g_{\alpha\nu}\Omega^\alpha_\mu + g_{\mu\beta}\Omega^\beta_\nu = \Omega_{\nu\mu} + \Omega_{\mu\nu}$$

Eq. 4-8

Che esprime in modo compatto il legame tra metrica e connessione.

[1] J.A.Wheeler, Gravitation, Freeman and Company, New York, 9th printing, 1995

[2] G.Prodi, “Lezioni di analisi matematica 2”, Bollati Boringhieri, marzo 2011

[3] Arnold, “Metodi matematici della meccanica classica”, Editori Riuniti, 2010