

Una guida pratica a SU(3)

Luca Alfinito, febbraio-luglio 2022

Gli studenti del Corso di Laurea in Fisica restano tipicamente affascinati dalle applicazioni del gruppo SU(2), che risultano evidenti fin dai corsi introduttivi alla Meccanica Quantistica (teoria del momento angolare e sistemi di spin $\frac{1}{2}$), ma hanno relativamente “meno tempo” per apprezzare la potenza di SU(3), introdotto per la prima volta da Gell-Mann per costruire il suo modello a sapori (a partire dalla famosa “via ottuplice”), attraverso l’introduzione della stranezza. Senza togliere nulla all’intuizione originaria, attualmente la simmetria SU(3) è utilizzata per il colore, rispetto al quale le particelle risultano singoletti; in ogni caso una comprensione più profonda di SU(3) permette di cogliere l’articolazione di una struttura più ampia, un cui accenno spero sia reso in modo sufficientemente chiaro in queste pagine.

1. Concetti introduttivi

Definizione. Rappresentazione: dato un gruppo G , una rappresentazione D del gruppo è un omomorfismo che associa ad ogni elemento di G un operatore lineare con le seguenti proprietà (e rappresenta l’identità):

$$\begin{aligned} D(e) &= \mathbf{1} \\ D(gh) &= D(g)D(h) \quad \forall g, h \in G \end{aligned}$$

Eq. 1-1

La rappresentazione è detta **fedele** se D è un isomorfismo, in caso contrario è **degenere**.

Una rappresentazione è **unitaria** se vale:

$$\forall g \quad D^\dagger(g) = D^{-1}(g)$$

Eq. 1-2

Una rappresentazione è **riducibile** se ammette un sottospazio invariante, ossia tale che l’applicazione del gruppo su questo sottospazio rimane all’interno di tale sottospazio.

Una rappresentazione è **completamente riducibile** se è equivalente a una rappresentazione le cui matrici sono diagonali a blocchi.

Una rappresentazione completamente riducibile si scompone in una **somma diretta** delle rappresentazioni:

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_j$$

Eq. 1-3

Teorema. Ogni rappresentazione di un **gruppo finito** è equivalente ad una rappresentazione unitaria. Inoltre essa è completamente riducibile.

Per il **Lemma di Schur**, se in un sottospazio in cui D è irriducibile si ha che un operatore A è tale da commutare con tutti gli elementi della rappresentazione, allora in tale sottospazio A è multiplo della matrice identità.

Questo implica in particolare che se un operatore O è invariante per un certo gruppo G di trasformazioni di simmetria, ad ogni rappresentazione irriducibile di G corrisponde un solo autovalore di O : tutti gli stati che trasformano secondo una rappresentazione irriducibile assumono lo stesso valore di aspettazione della variabile fisica determinata da O .

2. Gruppi di Lie

Definizione. Gruppo di Lie: gruppo continuo i cui elementi possono essere mappati utilizzando un certo numero di parametri:

$$g = g(\alpha)$$

Eq. 2-1

In particolare scegliamo la parametrizzazione in modo che l'identità corrisponda alla scelta di tutti i parametri nulli:

$$g(0) = e$$

Eq. 2-2

Questo permette di espandere la rappresentazione in un intorno dell'identità, utilizzando per una trasformazione infinitesima uno sviluppo di Taylor della forma:

$$D(d\alpha) = 1 + i\varepsilon_a T_a + o(\varepsilon^2)$$

Eq. 2-3

In cui si è fatto uso dei **generatori del gruppo** (o meglio: della rappresentazione del gruppo), definiti come:

$$T_a = -i \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha) \Big|_{\alpha=0}$$

Eq. 2-4

In cui è stata aggiunta la i in modo che i generatori di una rappresentazione unitaria siano operatori hermitiani, che quindi abbiano autovalori reali:

$$T_a^+ = T_a$$

Eq. 2-5

Quanto affermato a sostegno della scelta compiuta si dimostra facilmente per trasformazioni infinitesime imponendo l'unitarietà della rappresentazione:

$$\mathbf{1} = D^+(\varepsilon)D(\varepsilon) = \left(\mathbf{1} - i\varepsilon_a T_a^+\right)\left(\mathbf{1} + i\varepsilon_a T_a\right) \approx \mathbf{1} + i\varepsilon_a (T_a - T_a^+) \Rightarrow T_a = T_a^+$$

Eq. 2-6

La trasformazione finita si ottiene quindi come reiterazione delle trasformazioni infinitesime:

$$D(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\alpha_a T_a}{n}\right)^n = e^{i\alpha_a T_a}$$

Eq. 2-7

Per sviluppare la precedente dobbiamo tener conto però che in generale i commutatori possono non commutare, per cui si fa riferimento alla formula di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]+\dots}$$

Eq. 2-8

Sapendo però che la composizione di due trasformazioni finite è ancora una trasformazione finita, ossia che vale sempre:

$$e^{i\alpha_a T_a} e^{i\beta_b T_b} = e^{i\lambda_c T_c}$$

Eq. 2-9

Si ha che affinché l'equazione precedente sia valida, i commutatori presenti nell'Eq. 2-8 possono essere costruiti solo con una combinazione lineare dei generatori. Deve cioè sussistere una relazione del tipo:

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$$

Eq. 2-10

Per precisi valori di f_{abc} . Tali coefficienti prendono il nome di **costanti di struttura** perché definiscono l'algebra del gruppo. Si definisce **algebra di Lie** uno spazio vettoriale di dimensione n su cui esiste una legge di composizione interna chiamata **commutatore**. Si noti che l'intera struttura del gruppo è determinata dalle trasformazioni infinitesime in un intorno dell'identità.

Per le proprietà del commutatore si ha che:

$$if_{bac} T_c = [T_b, T_a] = -[T_a, T_b] = -if_{abc} T_c \Rightarrow f_{bac} = -f_{abc}$$

Eq. 2-11

Teorema (identità di Jacobi):

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0$$

Eq. 2-12

Sviluppando i passaggi si arriva ad un'identità tra le costanti di struttura:

$$\begin{aligned} [T_a, f_{bcd} T_d] + [T_b, f_{cad} T_d] + [T_c, f_{abd} T_d] &= 0 \\ f_{ade} f_{bcd} T_e + f_{bde} f_{cad} T_e + f_{cde} f_{abd} T_e &= 0 \\ \Rightarrow f_{ade} f_{bcd} + f_{bde} f_{cad} + f_{cde} f_{abd} &= 0 \end{aligned}$$

Eq. 2-13

3. Sottoalgebra di Cartan, rappresentazione aggiunta, pesi

Definizione. **Algebra di Lie compatta** : algebra in cui esiste sempre una base opportuna in cui si ha:

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$$

Eq. 3-1

Sottoalgebra invariante: un sottoinsieme di generatori chiuso rispetto alle operazioni di commutazione.

Ovviamente una sottoalgebra invariante genera un sottogruppo. Un'algebra che non possiede sottoalgebra è detta **semplice**

Sottoalgebra invariante abeliana: singolo generatore che commuta con tutti i generatori del gruppo; anche detta un **U(1)** del gruppo.

Algebra semisemplice: un'algebra senza sottoalgebra invarianti abeliane.

Definizione. **Sottoalgebra di Cartan:** il più grande sottoinsieme di generatori tutti commutanti tra loro. Il numero di generatori indipendenti di questa sottoalgebra è detto **rango** dell'algebra e non dipende dalla rappresentazione essendo una proprietà dell'algebra stessa. Tali generatori saranno indicati con la lettera *H*.

Definizione. **Vettore peso:** vettore di dimensione pari a quella della sottoalgebra di Cartan, avente per componenti gli autovalori simultanei dei generatori di Cartan.

Ad ogni autostato contemporaneo di tutti gli operatori della sottoalgebra di Cartan (esiste per la definizione stessa di tale sottoalgebra) è quindi associato un vettore peso. È infatti la commutatività dei generatori della sottoalgebra a garantire la possibilità di diagonalizzarli simultaneamente.

Lemma. Stati corrispondenti a differenti pesi devono essere ortogonali, perché hanno differenti autovalori di almeno uno dei generatori di Cartan.

Definizione. Il vettore peso è **positivo** quando la sua prima componente non nulla è positiva, **negativo** in caso contrario.

Possiamo definire la proprietà di comparazione in questo modo:

$$\mu > \nu \quad \text{se} \quad \mu - \nu \text{ è positivo}$$

Eq. 3-2

Questo ci permette di introdurre il concetto di **peso più alto** di una rappresentazione.

Osservazione. Il rango di un gruppo speciale unitario di dimensione n è $n-1$

Definizione. **Operatori di Casimir.** Funzioni non lineari dei generatori commutano con tutti i generatori, quindi sono invarianti sotto le trasformazioni del gruppo.

<u>Teorema.</u> Il numero di operatori di Casimir è uguale al rango dell'algebra
--

Definizione. **Rappresentazione aggiunta (NOTA BENE: da non confondere con rappresentazione complessa coniugata!):** una particolare rappresentazione del gruppo costruita a partire dalle costanti di struttura con il seguente criterio:

$$[X_a]_{bc} = -if_{abc}$$

Eq. 3-3

Dimostriamo quindi che la definizione garantisce la struttura dell'algebra Eq. 2-10, facendo più volte ricorso alle proprietà di antisimmetria delle costanti di struttura rispetto ai primi due indici (Eq. 2-11) o anche a monte ricorrendo alle identità di Bianchi:

$$\begin{aligned} [X_b, X_a]_{ce} &= [X_b]_{cd}[X_a]_{de} - [X_a]_{cd}[X_b]_{de} = (-i)^2 f_{ade}f_{bcd} - (-i)^2 f_{bde}f_{acd} = -f_{ade}f_{bcd} - f_{bde}f_{acd} = \\ &= f_{cde}f_{abd} = f_{dce}f_{bad} = \frac{[X_d]_{ce}}{(-i)} f_{bad} = if_{bad}[X_d]_{ce} \end{aligned}$$

Eq. 3-4

Possiamo scegliere il prodotto scalare nella rappresentazione aggiunta in modo che:

$$\delta_{\alpha\beta} = \langle E_\alpha | E_\beta \rangle = \lambda^{-1} Tr(E_\alpha^+ E_\beta)$$

Eq. 3-5

Ad ogni generatore della rappresentazione aggiunta (ancora indicato con X) è allora possibile associare uno stato valutando come tali stati si comportano sotto azione degli operatori:

$$X_a |X_b\rangle = |X_c\rangle \langle X_c | X_a |X_b\rangle = |X_c\rangle [X_a]_{cb} = -if_{acb} |X_c\rangle = if_{abc} |X_c\rangle = |if_{abc} X_c\rangle = |[X_a, X_b]\rangle$$

Eq. 3-6

Dalla precedente si vede in particolare che gli stati generati dagli operatori della sottoalgebra di Cartan appartengono al ker di tale sottoalgebra:

$$H_i |H_j\rangle = c_a X_a |d_b X_b\rangle = c_a d_b |[X_a, X_b]\rangle = |[c_a X_a, d_b X_b]\rangle = |[H_i, H_j]\rangle = 0$$

Eq. 3-7

Altri stati della rappresentazione aggiunta (indicati con la lettera E e il pedice) hanno in generale autovalori non nulli:

$$H_i |E_\alpha\rangle = \alpha_i |E_\alpha\rangle$$

Eq. 3-8

Vogliamo calcolare i corrispondenti generatori. Ma questo è facile nella rappresentazione aggiunta ricordando proprio l'Eq. 3-6, in cui in luogo di X_b troviamo un generico autostato; combinandola con la precedente Eq. 3-8:

$$\alpha_i |E_\alpha\rangle = H_i |E_\alpha\rangle = |[H_i, E_\alpha]\rangle \Rightarrow [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$$

Eq. 3-9

Definizione. Nel caso specifico della **rappresentazione aggiunta** i vettori peso (o “vettori degli autovalori”) della sottoalgebra di Cartan vengono chiamati **radici**.

Vedremo che le radici rivestono un ruolo fondamentale nella definizione delle proprietà del gruppo. Come per il caso dei vettori peso, la radice è **positiva** quando la sua prima componente non nulla è positiva, **negativa** in caso contrario.

Consideriamo un autostato contemporaneo di tutti gli operatori della sottoalgebra di Cartan, tale quindi da verificare $H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle$.

Utilizzando il commutatore sarà semplice calcolare:

$$H_i E_\alpha |\mu\rangle = [H_i, E_\alpha] |\mu\rangle + E_\alpha H_i |\mu\rangle = (\alpha_i E_\alpha) |\mu\rangle + E_\alpha H_i |\mu\rangle = (\alpha_i + \mu_i) E_\alpha |\mu\rangle$$

Eq. 3-10

Ossia l’azione di E_α su un autovettore dell’algebra di Cartan ne innalza Per questo motivo l’operatore E_α è detto di **innalzamento**. L’equazione precedente è vera per qualsiasi rappresentazione.

Si deve notare che gli operatori E non sono in generale Hermitiani (mentre i generatori H ovviamente lo sono), come si può valutare calcolando l’aggiunto del commutatore dell’Eq. 3-9:

$$\alpha_i E_\alpha^+ = (\alpha_i E_\alpha)^+ = [H_i, E_\alpha]^+ = (H_i E_\alpha - E_\alpha H_i)^+ = E_\alpha^+ H_i^+ - H_i^+ E_\alpha^+ = [E_\alpha^+, H_i^+] = [E_\alpha^+, H_i] = -[H_i, E_\alpha^+]$$

Eq. 3-11

In definitiva:

$$[H_i, E_\alpha^+] = -\alpha_i E_\alpha^+$$

Eq. 3-12

E pertanto:

$$E_\alpha^+ = E_{-\alpha}$$

Eq. 3-13

Per questo motivo l’operatore aggiunto di E_α è detto operatore di abbassamento. In definitiva conoscendo le radici di un’algebra e il peso di uno stato possiamo ricostruire l’intero sistema e conoscere i pesi degli altri stati.

Teorema. Vale anche l’importante risultato:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_i H_i = \alpha \cdot H$$

Eq. 3-14

L’equazione precedente può essere dimostrata nello spazio della rappresentazione aggiunta dove:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= d_j X_j \\ E_{-\alpha} &= c_i X_i \end{aligned}$$

Eq. 3-15

Vediamo allora che, grazie alle proprietà di tale rappresentazione:

$$\begin{aligned} E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle &= E_\alpha |c_i X_i\rangle = d_j X_j |c_i X_i\rangle = |c_i d_j [X_j, X_i]\rangle = \\ &= |[d_j X_j, c_i X_i]\rangle = |[E_\alpha, E_{-\alpha}] \rangle \end{aligned}$$

Eq. 3-16

Dimostriamo ora che (la somma è applicata sugli indici i ma ovviamente non su α):

$$E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle = \alpha_i |H_i\rangle$$

Eq. 3-17

Per prima cosa dobbiamo mostrare per l'Eq. 3-16 che il commutatore appartiene alla sottoalgebra di Cartan. Questo è equivalente a mostrare che suddetto commutatore commuta con qualunque elemento di tale sottoalgebra:

$$[[E_\alpha, E_{-\alpha}], H_i] = 0$$

Eq. 3-18

Ma questo può essere facilmente dimostrato con l'identità di Jacobi:

$$\begin{aligned} 0 &= [[E_\alpha, E_{-\alpha}], H_i] + [[H_i, E_\alpha], E_{-\alpha}] + [[E_{-\alpha}, H_i], E_\alpha] = \\ &= [[E_\alpha, E_{-\alpha}], H_i] + [\alpha_i E_\alpha, E_{-\alpha}] + [-[H_i, E_{-\alpha}], E_\alpha] = \\ &= [[E_\alpha, E_{-\alpha}], H_i] + \alpha_i E_\alpha E_{-\alpha} - \alpha_i E_{-\alpha} E_\alpha - (-\alpha_i) E_{-\alpha} E_\alpha + (-\alpha_i) E_\alpha E_{-\alpha} \end{aligned}$$

Eq. 3-19

Infine calcoliamo la proiezione sugli stati generati dagli elementi della sottoalgebra:

$$\begin{aligned} \langle H_i | E_\alpha | E_{-\alpha} \rangle &= \langle H_i | [E_\alpha, E_{-\alpha}] \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr}(H_i [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = \lambda^{-1} \text{Tr}(H_i E_\alpha E_{-\alpha} - H_i E_{-\alpha} E_\alpha) = \\ &= \lambda^{-1} \text{Tr}(E_\alpha [H_i, E_{-\alpha}]) = \lambda^{-1} \alpha_i \text{Tr}(E_\alpha E_{-\alpha}^+) = \alpha_i \end{aligned}$$

Eq. 3-20

Dunque:

$$|[E_\alpha, E_{-\alpha}]\rangle = E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle = \alpha_i |H_i\rangle \Rightarrow [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_i H_i$$

Eq. 3-21

c.v.d.

4. Radici e sottoalgebre SU(2)

Il risultato fondamentale di questo paragrafo è che ogni radice individua una sottoalgebra SU(2). Sia dato adesso il modulo di una radice:

$$|\alpha|^2 = \sum_i \alpha_i^2$$

Eq. 4-1

Teorema. Per ogni coppia di operatori $E_{+\alpha}$ ed $E_{-\alpha}$ è sempre possibile associare un terzo operatore, denominato E_3 , in modo venga formata una sottoalgebra SU(2) utilizzando i seguenti operatori:

$$E^{[\alpha]^\pm} = \frac{1}{|\alpha|} E_{\pm\alpha}$$

$$E_3^{[\alpha]} = \frac{1}{|\alpha|^2} \alpha \cdot H$$

Eq. 4-2

Per dimostrarlo dobbiamo verificare la sussistenza delle relazioni della sottoalgebra SU(2), che ricordiamo:

$$[J_3, J^\pm] = \pm J^\pm$$

$$[J^+, J^-] = J_3$$

Eq. 4-3

Per quanto riguarda la prima:

$$[E_3^{[\alpha]}, E^{[\alpha]^\pm}] = \frac{1}{|\alpha|^2} \frac{1}{|\alpha|} [\alpha \cdot H, E_{\pm\alpha}] = \frac{1}{|\alpha|^3} \alpha_i [H_i, E_{\pm\alpha}] = \frac{1}{|\alpha|^3} \sum_i (\pm \alpha_i) \alpha_i E_{\pm\alpha} = \pm \frac{1}{|\alpha|} E_{\pm\alpha} = \pm E^{[\alpha]^\pm}$$

Eq. 4-4

Mentre per la seconda:

$$[E^{[\alpha]^+}, E^{[\alpha]^-}] = \frac{1}{|\alpha|^2} [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \frac{1}{|\alpha|^2} \alpha_i H_i = E_3^{[\alpha]}$$

Eq. 4-5

Se ne ricava il seguente:

Teorema. Gli stati di ciascuna rappresentazione irriducibile dell'algebra completa possono sempre essere decomposti in rappresentazioni irriducibili di ciascuna di queste sottoalgebre SU(2): per ogni coppia non nulla di radici $+\alpha$ e $-\alpha$ esiste cioè una sottoalgebra SU(2) con generatori dati dall'Eq. 4-2. Questa circostanza pone allora dei vincoli molto forti alla natura delle radici; ad esempio mostriamo che:

Teorema. Nella *rappresentazione aggiunta* non sono necessari altri parametri al di fuori delle radici per qualificare gli stati, ossia che una radice corrisponde ad un unico generatore.

Dim.

Dimostriamo tale asserzione per assurdo, ipotizzando che vi siano due distinti generatori ortogonali a cui sia associata la stessa radice α :

$$\begin{aligned} H_i |E_\alpha\rangle &= \alpha_i |E_\alpha\rangle \\ H_i |E'_\alpha\rangle &= \alpha_i |E'_\alpha\rangle \\ \langle E_\alpha | E'_\alpha \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr}(E_\alpha^+ E'_\alpha) = \lambda^{-1} \text{Tr}(E_{-\alpha} E'_\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Eq. 4-6

Per prima cosa è facile mostrare che il vettore $E^- |E'_\alpha\rangle$ ha peso 0, ricordando quanto già ricavato nell'Eq. 3-10:

$$\begin{aligned} H_i E^{[\alpha]^-} |E'_\alpha\rangle &= H_i \left(\frac{1}{|\alpha|} E_{-\alpha} \right) |E'_\alpha\rangle = \frac{1}{|\alpha|} \{ [H_i, E_{-\alpha}] |E'_\alpha\rangle + E_{-\alpha} H_i |E'_\alpha\rangle \} = \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \{ -\alpha_i E_{-\alpha} |E'_\alpha\rangle + \alpha_i E_{-\alpha} |E'_\alpha\rangle \} = \frac{1}{|\alpha|} (-\alpha_i + \alpha_i) |E'_\alpha\rangle = 0 |E'_\alpha\rangle \end{aligned}$$

Eq. 4-7

Questo in particolare significa, ricordando l'algebra di SU(2), che il vettore $|E'_\alpha\rangle$ è lo stato con il minimo autovalore di E_3 . Vediamo anche che avendo il vettore $E^- |E'_\alpha\rangle$ peso nullo, questo può essere al massimo ricavato come combinazione esclusiva dei vettori corrispondenti ai generatori di Cartan, questo per la regola di commutazione (Eq. 3-6). Calcolandone i coefficienti si ricava (la traccia di un prodotto di operatori è invariante rispetto ad una permutazione ciclica):

$$\begin{aligned} \langle H_i | E^{[\alpha]^-} | E'_\alpha \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr}(H_i [E^{[\alpha]^-}, E'_\alpha]) = \lambda^{-1} \text{Tr}(H_i E^{[\alpha]^-} E'_\alpha - H_i E'_\alpha E^{[\alpha]^-}) = \\ &= \lambda^{-1} \text{Tr}(E^{[\alpha]^-} E'_\alpha H_i - E^{[\alpha]^-} H_i E'_\alpha) = \lambda^{-1} \text{Tr}(E^{[\alpha]^-} [E'_\alpha, H_i]) = \\ &= -\lambda^{-1} \text{Tr}(E^{[\alpha]^-} [H_i, E'_\alpha]) = -\lambda^{-1} \alpha_i \text{Tr}(E^{[\alpha]^-} E'_\alpha) \stackrel{E^{[\alpha]^-} = E_\alpha^+}{=} -\lambda^{-1} \alpha_i \text{Tr}(E_\alpha^+ E'_\alpha) = \\ &= \langle E_\alpha | E'_\alpha \rangle = 0 \end{aligned}$$

Eq. 4-8

Dunque:

$$E^{[\alpha]^-} |E'_\alpha\rangle = 0$$

Eq. 4-9

Abbiamo detto che E'_α è lo stato con il minimo autovalore di $E_3^{[\alpha]}$. Però questo è impossibile, perché deve essere anche:

$$E_3^{[\alpha]} |E'_\alpha\rangle = \frac{1}{|\alpha|^2} \alpha \cdot H |E'_\alpha\rangle = |E'_\alpha\rangle$$

Eq. 4-10

Ossia deve anche avere autovalore 1. E di conseguenza i due risultati sono incompatibili, perché sappiamo che il minimo autovalore di qualsiasi rappresentazione SU(2) è pari a $-j$. Quindi se α è una radice, nessun altro parametro è necessario per identificare il suo unico autovettore relativo $|E_\alpha\rangle$.

c.v.d.

Teorema. Se α è una radice allora non esistono altre radici non nulle multiple di α ad eccezione di $-\alpha$. [1, pag. 95].

Una volta individuata la sottoalgebra SU(2) e definito $E_3^{[\alpha]}$ con i relativi operatori di salita e discesa, sia adesso j il suo massimo autovalore. Per ogni vettore peso $|\mu\rangle$ vale:

$$E_3^{[\alpha]}|\mu\rangle = \frac{1}{|\alpha|^2} \alpha \cdot H |\mu\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{|\alpha|^2} |\mu\rangle$$

Eq. 4-11

Dall'algebra di SU(2) sappiamo che $\frac{\alpha \cdot \mu}{|\alpha|^2}$ deve essere semi-intero.

Il generico autostato $|\mu\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare di stati che si trasformano secondo le rappresentazioni delle sottoalgebre SU(2).

Inoltre, dall'Eq. 3-10 esistono due valori interi p e q tali che:

$$\begin{aligned} (E^{[\alpha^+]})^p |\mu\rangle \neq 0 & \quad (E^{[\alpha^+]})^{p+1} |\mu\rangle = 0 \\ (E^{[\alpha^-]})^q |\mu\rangle \neq 0 & \quad (E^{[\alpha^-]})^{q+1} |\mu\rangle = 0 \end{aligned}$$

Eq. 4-12

Sappiamo anche che:

$$\begin{aligned} E_3^{[\alpha]} (E^{[\alpha^+]})^p |\mu\rangle &= \frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{|\alpha|^2} (E^{[\alpha^+]})^p |\mu\rangle = \left(\frac{\alpha \cdot \mu}{|\alpha|^2} + p \right) (E^{[\alpha^+]})^p |\mu\rangle = j (E^{[\alpha^+]})^p |\mu\rangle \\ E_3^{[\alpha]} (E^{[\alpha^-]})^q |\mu\rangle &= \frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{|\alpha|^2} (E^{[\alpha^-]})^q |\mu\rangle = \left(\frac{\alpha \cdot \mu}{|\alpha|^2} - q \right) (E^{[\alpha^-]})^q |\mu\rangle = -j (E^{[\alpha^-]})^q |\mu\rangle \end{aligned}$$

Eq. 4-13

Si ricava allora l'importante relazione:

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{|\alpha|^2} = \frac{1}{2} (q - p)$$

Eq. 4-14

Che ha un importante ruolo nell'analisi delle algebre di Lie compatte ed è nota come "*master formula*".

Si tratta di uno strumento molto potente per calcolare il fortissimo vincolo che sussiste tra due coppie di radici distinte α e β . Definendo ad esempio l'algebra SU(2) attraverso E_α si ha:

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|^2} = \frac{1}{2}(q^{[\alpha]} - p^{[\alpha]})$$

Eq. 4-15

Utilizzando invece E_β si ha:

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{|\beta|^2} = \frac{1}{2}(q^{[\beta]} - p^{[\beta]})$$

Eq. 4-16

Moltiplicando i risultati si ottiene la relazione di natura geometrica tra i due radici:

$$\cos^2 \vartheta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{|\alpha|^2 |\beta|^2} = \frac{1}{4}(q^{[\alpha]} - p^{[\alpha]})(q^{[\beta]} - p^{[\beta]})$$

Eq. 4-17

Ricordando che $(q^{[\alpha]} - p^{[\alpha]})(q^{[\beta]} - p^{[\beta]})$ è il prodotto di due interi, vediamo quindi le varie possibilità:

$(q^{[\alpha]} - p^{[\alpha]})(q^{[\beta]} - p^{[\beta]})$	$\vartheta_{\alpha\beta}$
0	90°
1	60° o 120°
2	45° o 135°
3	30° o 150°
4	0° o 180°

In particolare il caso 180° è triviale perché è noto dall'algebra che le radici si presentano sempre in coppie di segno opposto. Il caso 0° deriva dal teorema di unicità, già dimostrato.

Vale infine, per quanto detto:

$$p + q = 2j$$

Eq. 4-18

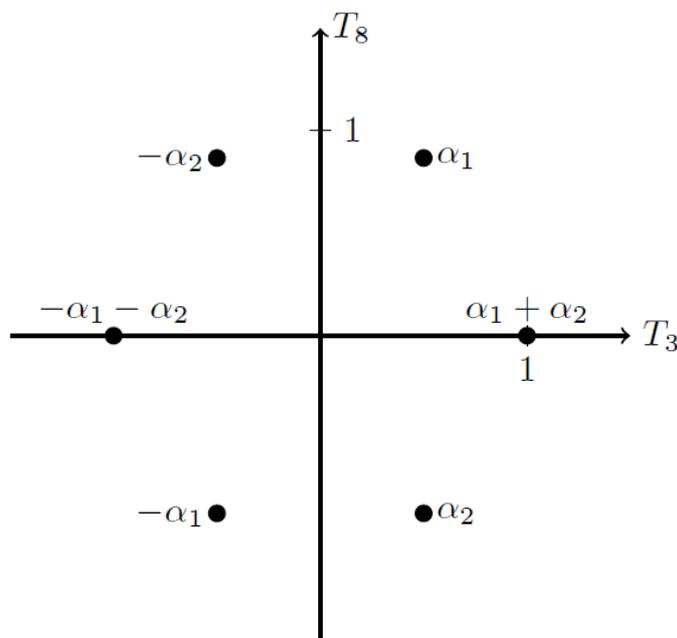
Quindi la conoscenza del massimo valore di spin e la conoscenza contemporanea di p e q sono due informazioni equivalenti.

Nella *rappresentazione aggiunta*, poiché ciascuna radice appare solo una volta, se conosciamo p e q (e quindi j) per una radice β sotto l'azione di $SU(2)$ associato ad una radice semplice α , possiamo concludere

che $|\beta\rangle$ è lo stato di $E_3^{[\alpha]} = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|^2}$ nella rappresentazione di spin j :

$$|\beta\rangle = \left| j, \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|^2} \right\rangle$$

Ed è completamente determinato a meno di una fase. Quindi, sempre a meno di una fase, conosciamo esattamente come agiscono i relativi operatori di salita e di discesa, il che ci permette di costruire l'algebra. Ad esempio il diagramma delle radici di SU(3) è:



5. Proprietà delle radici semplici

Alcune radici positive possono essere costruite da altre. Definiamo allora radici semplici le radici **positive** (ossia, vettori che hanno per componenti autovalori dell'algebra di Cartan e la cui prima componente è positiva) che non possono essere scritte come somma di altre radici positive, e per questo motivo sono quindi linearmente indipendenti.

Da ciò derivano alcune interessanti proprietà:

1. la differenza tra due radici semplici non può essere una radice, dal momento che per assurdo non fosse così, ipotizzando due radici semplici con $\alpha > \beta$:

$$\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$$

Eq. 5-1

Quindi α non sarebbe semplice in quanto scrivibile come combinazione lineare di due radici semplici.

2. Poiché $\alpha - \beta$ non è una radice:

$$0 = E_\alpha |E_{-\beta}\rangle = E_{-\beta} |E_\alpha\rangle$$

Dim:

$$H_i E_\alpha |E_{-\beta}\rangle = (\alpha - \beta) E_\alpha |E_{-\beta}\rangle$$

Quindi avremmo trovato un autostato per cui $\alpha - \beta$ è una radice, il che contraddice l'ipotesi.

Si trova quindi che applicando la master formula prima rispetto ad α e poi a β :

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|^2} = \frac{1}{2} (q^{[\alpha]} - p^{[\alpha]}) \stackrel{q^{[\alpha]}=0}{=} -\frac{1}{2} p^{[\alpha]}$$

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{|\beta|^2} = \frac{1}{2} (q^{[\beta]} - p^{[\beta]}) \stackrel{q^{[\beta]}=0}{=} -\frac{1}{2} p^{[\beta]}$$

Pertanto la conoscenza degli interi $p^{[\alpha]}$ e $p^{[\beta]}$ equivale a conoscere gli angoli tra due radici semplici e le loro lunghezze relative:

$$\cos \vartheta_{\alpha\beta} = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|} = -\sqrt{\frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{|\alpha|^2 |\beta|^2}} = -\frac{\sqrt{p^{[\alpha]} p^{[\beta]}}}{2}$$

$$\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \frac{p^{[\alpha]}}{p^{[\beta]}}$$

Dove il segno meno dalla prima delle Eq. 5-4 viene introdotto a mano per richiamare il segno negativo davanti a p nella parte destra delle Eq. 5-3, e indica che:

$$\alpha \cdot \beta \leq 0$$

3. L'angolo tra due qualsiasi radici semplici soddisfa la relazione:

$$\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_{\alpha\beta} < \pi$$

La prima disuguaglianza deriva dal fatto che il coseno è sempre minore o uguale a zero, la seconda dal punto successivo.

4. Tutte le radici semplici sono linearmente indipendenti.

Per dimostrarlo è sufficiente verificare che nessuna combinazione lineare tra le radici semplici può essere nulla. Consideriamo allora la generica combinazione lineare di radici semplici, suddividendola tra una somma di coefficienti positivi e negativi, di cui si mette in evidenza il segno:

$$\tau = \sum_{k_i > 0} k_i \alpha_i - \left(- \sum_{k_j < 0} |k_j| \alpha_j \right) = \rho - \sigma$$

Eq. 5-7

Vediamo allora che questo modulo non può annullarsi:

$$\tau^2 = (\rho - \sigma)^2 = \rho^2 + \sigma^2 - 2\rho \cdot \sigma \geq \rho^2 + \sigma^2$$

Eq. 5-8

Dove la disuguaglianza deriva dal segno negativo davanti a ρ nella parte destra delle Eq. 5-3. Quindi non esiste alcuna combinazione lineare che restituisca un valore nullo, c.v.d.

5. Ogni radice positiva può essere scritta come combinazione lineare di radici semplici con coefficienti non negativi interi (se non fosse così sarebbe essa stessa una radice semplice).
6. Le radici semplici, che sappiamo essere tutte linearmente indipendenti, formano un set completo.

Dimostriamo l'ultimo punto per assurdo, supponendo che esista un qualche vettore g ortogonale a tutte le radici semplici, quindi a tutte le radici:

$$g \cdot \beta = 0 \quad \forall \beta$$

Eq. 5-9

Allora:

$$[g \cdot H, E_\beta] = g \cdot H |E_\beta\rangle = g \cdot \beta |E_\beta\rangle = 0 \Rightarrow [g \cdot H, E_\beta] \quad \forall \beta$$

Eq. 5-10

Il che equivale a dire che gH commuta, oltreché naturalmente a tutti i generatori di Cartan (per definizione della sottoalgebra), anche con i rimanenti generatori, il che ne renderebbe l'algebra non semisemplice.

Per questo motivo il numero di radici semplici è pari al numero di generatori di Cartan.

Inoltre poiché le radici formano un set completo possiamo esprimere qualsiasi peso in funzione di queste.

Gli enunciati precedenti ci mettono quindi in condizione di costruire l'intera algebra a partire dalle radici semplici.

6. Calcolo di tutte le radici e matrice di Cartan

Data una generica radice semplice $\alpha^{[i]}$ ricordiamo che, per quanto detto (Eq. 4-14), una volta costruito il relativo $E_3^{\alpha^{[i]}}$, vale su un generico autovettore:

$$E_3^{\alpha^{[i]}}|\mu\rangle = \frac{1}{|\alpha^{[i]}|^2} \alpha^{[i]} \cdot H|\mu\rangle = \frac{\alpha^{[i]} \cdot \mu}{|\alpha^{[i]}|^2} |\mu\rangle = \frac{1}{2} (q^{[i]} - p^{[i]}) |\mu\rangle \Leftrightarrow \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \mu}{|\alpha^{[i]}|^2} = q^{[i]} - p^{[i]}$$

Eq. 6-1

Dal paragrafo precedente è inoltre noto che tutte le radici positive sono ricavabili come combinazione lineare di radici semplici con coefficienti interi non negativi:

$$\phi_n = k_i \alpha^{[i]}$$

Eq. 6-2

Dobbiamo allora determinare il criterio per verificare quali combinazioni siano ancora radici, e questo è possibile utilizzando proprio la *master formula*. Sia:

$$n = \sum_i k_i$$

Eq. 6-3

L'applicazione di un generico $\alpha^{[r]}$ innalza di una unità solo il relativo coefficiente k_r :

$$\phi \rightarrow \phi + \alpha^{[r]} \Rightarrow k_r \rightarrow k_r + 1$$

Eq. 6-4

In termini di azione sugli stati è ormai noto che l'operatore di salita si esprime come $E_{\alpha^{[r]}}|\phi_n\rangle$.

Cominciamo con il caso $n=1$ (ossia esiste solo un k_j pari a 1). Evidentemente si tratta di una radice semplice, che indicheremo con $\alpha^{[j]}$. Allora sappiamo che, per ogni altra radice semplice $\alpha^{[i]}$:

$$\frac{2\alpha^{[i]} \cdot \phi_1}{|\alpha^{[i]}|^2} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[j]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = q^{[i]} - p^{[i]}$$

Eq. 6-5

Ma poiché $\alpha^{[i]}$ è una radice semplice allora sappiamo che $q^{[j]} = 0$ (se ciò non fosse dovrebbe ad esempio valere, vedi seconda delle Eq. 4-13):

$$E_3^{\alpha^{[j]}} \left(E^{\alpha^{[i]}} \right)^q |\alpha^{[i]}\rangle = \frac{\alpha^{[j]} \cdot (\alpha^{[i]} - q\alpha^{[j]})}{|\alpha^{[j]}|^2} \left(E^{\alpha^{[i]}} \right)^q |\alpha^{[i]}\rangle$$

Eq. 6-6

Questo identificherebbe $(E^-)^q |\alpha^{[i]}\rangle$ come autovettore di $E_3^{\alpha^{[j]}}$ con radice $\alpha^{[i]} - q\alpha^{[j]}$, il che non è possibile.

Dunque fuori dalla diagonale $q^{[i]} = 0$ e $A_{ji} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[j]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = -p^{[i]}$.

Proseguendo nella dimostrazione, se $\alpha^{[i]} \cdot \phi_1 = 0$ allora $p^{[i]} = 0$ e quindi $\alpha^{[i]} + \phi_1$ non è una radice. Altrimenti per la proprietà espressa dall'Eq. 5-5 $p^{[i]} > 0$ e $\alpha^{[i]} + \phi_1$ è una radice. Procedendo per ricorsività, questo metodo di costruire nuove radici potrebbe fallire solo se ci fosse una radice ϕ_{n+1} che non sia scrivibile come somma di una radice ϕ_n e di una qualsiasi radice semplice, cosa che però non è possibile: se ci fosse un tale ϕ_{n+1} sarebbe allora annichilito da tutti gli $E_{-\alpha^{[r]}}$ (se così non fosse $E_{-\alpha^{[r]}} |\phi_{n+1}\rangle$ sarebbe uno stato a cui potrei applicare nuovamente $E_{\alpha^{[r]}}$ per risalita, in contraddizione con l'ipotesi). Per quanto detto $|\phi_{n+1}\rangle$ trasformerebbe quindi come lo stato più basso di tutte le sottoalgebre SU(2) associate alle radici semplici, ossia:

$$\forall \alpha^{[i]} \quad \frac{\alpha^{[i]} \cdot \phi_{n+1}}{|\alpha^{[i]}|^2} = E_3^{\alpha^{[i]}} |\phi_{n+1}\rangle \quad \frac{\alpha^{[i]} \cdot \phi_{n+1}}{|\alpha^{[i]}|^2} \leq 0$$

Eq. 6-7

Ma questo sarebbe in ovvia contraddizione riscrivendo opportunamente il calcolo del modulo di ϕ_{n+1} in funzione di quanto trovato:

$$0 < |\phi_{n+1}|^2 = (k_i \alpha^{[i]}) \cdot \phi_{n+1} = k_i (\alpha^{[i]} \cdot \phi_{n+1})$$

Eq. 6-8

c.v.d.

Per quanto detto, possiamo individuare tutte le radici ϕ_{n+1} agendo su tutti i ϕ_n attraverso le radici semplici.

Possiamo riscrivere tutto in termini di formalismo di matrice di Cartan , così definita:

$$A_{ji} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[j]}}{|\alpha^{[i]}|^2}$$

Eq. 6-9

Riassumendo le proprietà della matrice di Cartan:

- ✓ gli elementi della matrice sono interi e pari alle differenze $q^{[i]} - p^{[i]}$;

- ✓ per il fattore a moltiplicare la normalizzazione offerta dal denominatore gli elementi della diagonale $[i=j]$ sono pari a 2, valore ottenibile solo dalla combinazione $q^{[i]} = 2, p^{[i]} = 0$;
- ✓ per il punto precedente ogni radice semplice α^i rappresenta lo stato di massimo spin di una rappresentazione SU(2) con spin 1 (vi si può applicare 2 volte l'operatore di abbassamento, infatti $p + q = 2j$).

Ciò detto, ne vediamo quindi l'utilità considerando ancora il passaggio $\phi \rightarrow \phi + \alpha^{[r]}$, partendo da:

$$\frac{2\alpha^{[i]} \cdot \phi}{|\alpha^{[i]}|^2} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot (k_j \alpha^{[j]})}{|\alpha^{[i]}|^2} = k_j A_{ji} = q^{[i]} - p^{[i]} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j \\ -p^{[i]} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Eq. 6-10

Ricordiamo che il salto $\phi \rightarrow \phi + \alpha^{[r]}$ è ottenuto dall'applicazione dell'operatore di salita $E_{\alpha^{[r]}}$ che cambia di una unità il coefficiente k_r :

$$\frac{2\alpha^{[i]} \cdot (\phi + \alpha^{[r]})}{|\alpha^{[i]}|^2} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot (k_j \alpha^{[j]} + \alpha^{[r]})}{|\alpha^{[i]}|^2} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot (k_j \alpha^{[j]})}{|\alpha^{[i]}|^2} + \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[r]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = k_j A_{ji} + A_{ri} = k_j (q^{[i]} - p^{[i]}) + A_{ri}$$

Eq. 6-11

Il che equivale, considerando le $q^{[i]} - p^{[i]}$ come le componenti (sempre intere) relative alle colonne indicizzate con i del vettore riga j , ad effettuare la traslazione definita dal vettore riga r -esimo della matrice di Cartan:

$$q^{[i]} - p^{[i]} \rightarrow q^{[i]} - p^{[i]} + A_{ri}$$

Veniamo ora al metodo grafico per trovare tutte le radici partendo dalle radici semplici, facendo l'esempio proprio con SU(3) che sappiamo avere rango 2, quindi due radici semplici (quindi con matrice di Cartan 2x2).

Per prima cosa si parte dal livello $k_1 + k_2 = 1$, ossia quello in cui si ha agisce su una sola radice semplice, e si valuta ogni singola riga della matrice di Cartan. Possiamo scrivere in modo più compatto quanto trovato introducendo la notazione in cui ogni riga rappresenta un "box".

Ad esempio per la riga associata ad $\alpha^{[1]}$:

$$\underbrace{A_{11} = \frac{2\alpha^{[1]} \cdot \alpha^{[1]}}{|\alpha^{[1]}|^2} = 2 = q^{[1]} - p^{[1]} \Rightarrow \begin{cases} q^{[1]} = 2 \\ p^{[1]} = 0 \end{cases} \quad A_{12} = \frac{2\alpha^{[2]} \cdot \alpha^{[1]}}{|\alpha^{[2]}|^2} = -1 = q^{[2]} - p^{[2]} \Rightarrow \begin{cases} q^{[2]} = 0 \\ p^{[2]} = 1 \end{cases}}_{\alpha_1\text{-box}}$$

In questo modo:

$$\underbrace{\begin{matrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \\ \hline \end{matrix}}_{\alpha_1\text{-box}} \quad \underbrace{\begin{matrix} \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle \\ \hline \end{matrix}}_{\alpha_2\text{-box}} = \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 \\ \hline \end{matrix}}_{\alpha_1\text{-box}} \quad \underbrace{\begin{matrix} -1 & 2 \\ \hline \end{matrix}}_{\alpha_2\text{-box}}$$

Vediamo cosa succede considerando ad esempio il passaggio: $\alpha^{[1]} \rightarrow \alpha^{[1']} = \alpha^{[1]} + \alpha^{[2]}$

$$A_{1i} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot (\alpha^{[1]} + \alpha^{[2]})}{|\alpha^{[i]}|^2} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[1]}}{|\alpha^{[i]}|^2} + \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[2]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = A_{1i} + A_{2i}$$

$$(\alpha^{[1]} + \alpha^{[2]})\text{-box} = [A_{11} + A_{21} \quad A_{12} + A_{22}] = [2 + (-1) \quad -1 + 2] = [1 \quad 1]$$

Eq. 6-12

La qual cosa è infatti possibile perché ogni valore negativo di un certo box, ad esempio $A_{12} = -1$, significa un certo valore non nullo per p (per lo specifico caso $p^{[2]} = 1$), quindi possiamo “innalzare $\alpha^{[1]}$ di un $\alpha^{[2]}$ ” aggiungendo ad ogni vettore riga indicato dal primo pedice (in questo esempio, appunto, 1) il corrispondente vettore riga indicato dal secondo pedice (in questo caso, la riga 2). Così si costruiscono nuove radici di fatto sommando i vettori riga. **NOTA BENE:** con questo metodo non si ricavano direttamente gli autovalori, ma solo i valori $q^{[i]}$ e $p^{[i]}$ relativi alla radice di arrivo (ogni i indicando un dato $\alpha^{[i]}$).

NOTAZIONE. Questa operazione è indicata con il singolo grafico specifico, associato alla radice semplice da aggiungere (ad esempio una linea ondulata per la radice semplice $\alpha^{[2]}$).

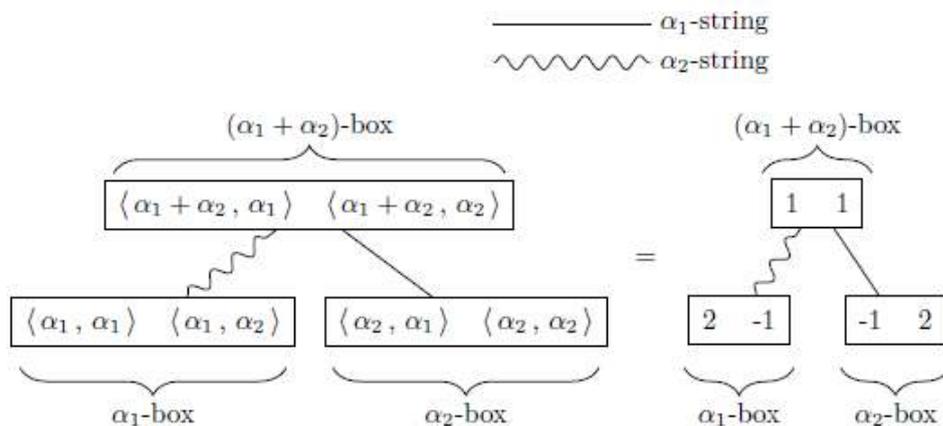
Si può ripetere lo stesso ragionamento partendo da $\alpha^{[2]}$ ed andando a sommare $\alpha^{[1]}$:

$$A_{2i} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot (\alpha^{[2]} + \alpha^{[1]})}{|\alpha^{[i]}|^2} = \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[2]}}{|\alpha^{[i]}|^2} + \frac{2\alpha^{[i]} \cdot \alpha^{[1]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = A_{2i} + A_{1i}$$

$$(\alpha^{[2]} + \alpha^{[1]})\text{-box} = [A_{21} + A_{11} \quad A_{22} + A_{12}] = [(-1) + 2 \quad 2 + (-1)] = [1 \quad 1]$$

Eq. 6-13

Ossia vediamo che in questo caso l’applicazione di uno dei due box sull’altro ci porta sempre a [1 1], risultato che può essere messo sotto forma dello schema seguente:



7. Pesì fondamentali

La discussione svolta per le radici può essere generalizzata per i pesi, e questo è cruciale in quanto vedremo che la dimensione di una rappresentazione è collegata con il suo peso massimo. Siano adesso $|\alpha^{[i]}\rangle$ con $i=1,\dots,m$ le radici semplici. Se $|\mu_{\max}\rangle$ è il massimo peso per una data rappresentazione irriducibile, allora tutte le radici positive annichilano lo stato:

$$E_{\alpha^{[i]}}|\mu_{\max,D}\rangle = 0 \quad \forall i$$

Eq. 7-1

In altre parole la rappresentazione ha la proprietà che $\mu_{\max} + \alpha^{[i]}$ non è un peso per ogni radice positiva. Vale anche il viceversa: se tutte le radici positive annichilano uno stato, allora il relativo peso è massimo.

Se Eq. 7-1 è vera allora $p^{[i]} = 0$ e quindi:

$$\frac{2\alpha^{[i]} \cdot \mu_{\max,D}}{|\alpha^{[i]}|^2} = l^{[i]} \quad l^{[i]} \in \mathbb{N}$$

Eq. 7-2

Essendo le $\alpha^{[i]}$ linearmente indipendenti, gli interi $l^{[i]}$ determinano completamente μ .

Ciascun set di $l^{[i]}$ fornisce un μ che è il più alto peso di qualche rappresentazione irriducibile.

Per questo la rappresentazione irriducibile di un'algebra di Lie semplice di rango m può essere etichettata da un set di m interi non negativi $l^{[i]}$, che vengono chiamati **coefficienti di Dynkin**.

I coefficienti di Dynkin di un generico peso μ sono l'analogo degli elementi della matrice di Cartan che invece erano calcolati per le radici semplici: per questo motivo è possibile costruire i pesi di una rappresentazione irriducibile utilizzando lo stesso metodo adoperato per le radici, come vedremo inseguito, ma non prima di aver introdotto una base costituita dai cosiddetti pesi fondamentali.

Definizione. **Pesi fondamentali** : pesi che soddisfano la relazione:

$$\frac{2\alpha^{[i]} \cdot \mu^{[k]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = \delta_{ik}$$

Eq. 7-3

In questo modo abbiamo una corrispondenza tra radici e pesi, ed ogni peso massimo può essere scritto come:

$$\mu_{\max,D} = l^{[k]} \mu^{[k]}$$

Eq. 7-4

Dim. (euristica):

$$l^{[i]} = \frac{\mu_{\max, D} \cdot 2\alpha^{[i]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = \frac{(l^{[k]} \mu^{[k]}) \cdot 2\alpha^{[i]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = l^{[k]} \frac{\mu^{[k]} \cdot 2\alpha^{[i]}}{|\alpha^{[i]}|^2} = l^{[k]} \delta_{ki}$$

Eq. 7-5

Possiamo quindi costruire la rappresentazione con peso massimo μ_{\max} con un prodotto tensoriale di una rappresentazione $l^{[1]}$ di peso massimo $\mu^{[1]}$, una rappresentazione $l^{[2]}$ di peso massimo $\mu^{[2]}$ e così via fino ad m . Queste m rappresentazioni irriducibili sono chiamate le **rappresentazioni fondamentali** e sono denotate con D^j :

Definizione. Si chiama **rappresentazione fondamentale** $(l^{(1)}, l^{(2)}, \dots, l^{(m)})$ quella caratterizzata dal peso massimo $\lambda = \sum_{j=1}^m l^{[j]} \mu^{[j]}$.

Proposizione. Ad ogni peso massimo corrisponde una sola rappresentazione fondamentale.

Come esempio possiamo partire dalla rappresentazione (1,0) di SU(3). Si applicherà quindi lo stesso schema usato per le radici ma stavolta sottraendole dal peso massimo, ossia applicando gli operatori di abbassamento. Si partirà quindi da un layer che corrisponde ad un determinato peso massimo:

$$\overbrace{\langle \mu_1, \alpha_1 \rangle \quad \langle \mu_1, \alpha_2 \rangle}^{\mu_1\text{-box}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\mu_1\text{-box}}$$

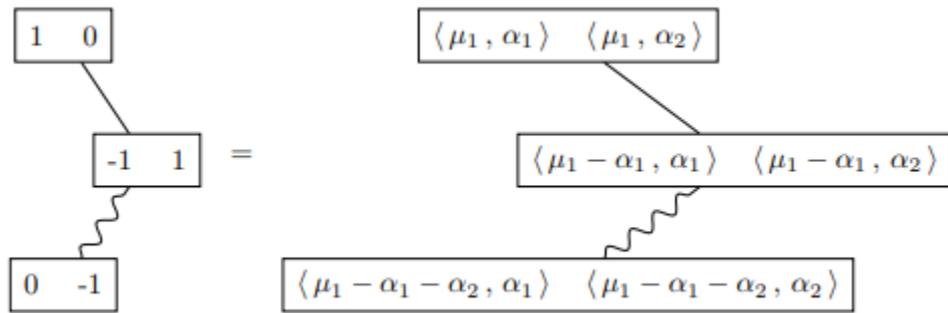
Ricordando che la differenza di pesi è una radice, riscriviamo i box delle due radici semplici di SU(3):

$$\alpha_1\text{-box: } \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2\text{-box: } \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{-----} \alpha_1\text{-string} \\ \text{~~~~~} \alpha_2\text{-string} \end{array}$$

Adesso si cercano i valori positivi del μ_1 -box per sottrarre potenzialmente k_j volte gli α_j -box dal μ_1 -box. Vediamo che l'unica possibilità è sottrarre α_1 -box una volta sola:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \diagdown \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \langle \mu_1, \alpha_1 \rangle & \langle \mu_1, \alpha_2 \rangle \end{bmatrix} \\ \diagdown \\ \begin{bmatrix} \langle \mu_1 - \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \langle \mu_1 - \alpha_1, \alpha_2 \rangle \end{bmatrix} \end{array}$$

Adesso si può proseguire sottraendo una volta sola α_2 -box (il valore positivo di [-1, 1] è quello che riguarda la seconda radice, ossia α_2).

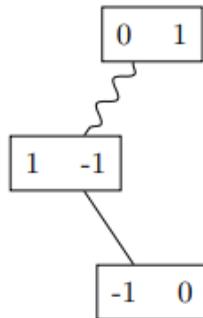


In questo caso, la rappresentazione di peso massimo μ_1 ha dimensione tre dal momento che ogni spazio dei pesi è 1-dimensionale:

$$V(\mu_1) = V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_1 - \alpha_1} \oplus V_{\mu_1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

Eq. 7-6

Al contrario, il diagramma di costruzione dei pesi nella rappresentazione (0,1) di SU(3) è:



E la somma diretta della rappresentazione è data da:

$$V(\mu_2) = V_{\mu_2} \oplus V_{\mu_2 - \alpha_2} \oplus V_{\mu_2 - \alpha_2 - \alpha_1}$$

Eq. 7-7

Torneremo ancora sulle due rappresentazioni fondamentali (inequivalenti!) di SU(3) nel paragrafo dedicato. Nel caso di SU(2), in cui l'algebra di Cartan ha dimensione uno, si ha invece una sola rappresentazione fondamentale.

6. E finalmente: SU(3)

Ogni Gruppo Speciale Unitario $SU(n)$ è generato da matrici Hermitiane a traccia nulla, condizione questa affinché il determinante sia 1 in ragione della formula:

$$\det(\mathbf{1} + \varepsilon M) = 1 + Tr(\varepsilon M) + o(\varepsilon^2)$$

Eq. 6-1

Ricordiamo che un gruppo $SU(n)$ ha n^2-1 generatori e rango $n-1$, dunque $SU(3)$ ha 8 generatori e rango 2. Gli otto generatori possono essere costruiti in modo da evidenziare subito una sottoalgebra $SU(2)$ nei primi 3:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1[2 \times 2]} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{2[2 \times 2]} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{3[2 \times 2]} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 6-2

Questo costruisce la sottoalgebra $SU(2)$ per le componenti 1 e 2, chiamata gruppo di isospin (I-spin). Possiamo trovare quindi i generatori che siano gli analoghi di σ_1 e σ_2 ma rispettivamente per le coppie di componenti 1 e 3 ($\lambda_4 ; \lambda_5$) e 2 e 3 ($\lambda_6 ; \lambda_7$):

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 6-3

La scelta dell'ottavo generatore è quindi obbligata per l'indipendenza lineare, e sarà proporzionale alla somma degli analoghi di σ_3 per queste ultime λ_4 e λ_5 e λ_6 e λ_7 :

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eq. 6-4

Abbiamo visto come le coppie ($\lambda_4 ; \lambda_5$) e ($\lambda_6 ; \lambda_7$) sono a tutti gli effetti coppie matrici di Pauli se si prende, a seconda della coppia scelta, come terzo elemento un'opportuna combinazione lineare di λ_3 e λ_8 .

Ponendo:

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a$$

Eq. 6-5

Si verificano le relazioni:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_a) &= 0 \\ \text{Tr}(T_a T_b) &= \frac{1}{2} \delta_{ab} \end{aligned}$$

Eq. 6-6

In particolare la prima delle Eq. 6-6 è conseguenza di un più generale:

Teorema. La traccia di qualsiasi generatore di qualsiasi rappresentazione di un gruppo di Lie compatto è pari a zero (una dimostrazione è data in [1], pag. 123).

Si ottiene la seguente algebra:

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$$

Eq. 6-7

Espressa dalle costanti di struttura del gruppo (totalmente antisimmetriche):

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} &= \frac{1}{2} \\ f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Eq. 6-8

Tutte le altre costanti non ricavabili dalle precedenti mediante permutazioni sono nulle. Tutte le costanti di struttura sono comunque reali.

Si individuano anche le regole di anticommutazione, funzione di diverse costanti:

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} + d_{abc} T_c$$

Eq. 6-9

In cui:

$$\begin{aligned} d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La diagonalizzazione contemporanea di λ_3 e λ_8 consente ad esempio di utilizzare suddetti generatori nella sottoalgebra di Cartan, che sappiamo avere dimensione 2 per SU(3). In virtù della scelta compiuta, l'algebra di Cartan è quindi:

$$\begin{aligned} H_1 &= T_3 \\ H_2 &= T_8 \end{aligned}$$

Eq. 6-10

Riportiamo qui i due generatori, entrambi diagonali:

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Eq. 6-11

I vettori peso hanno quindi due dimensioni. Poiché entrambi i generatori sono scritti in forma diagonale, gli autostati e relativi i pesi nella rappresentazione fondamentale (di dimensione 3) sono:

$$\text{Rappresentazione "3":} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Eq. 6-12

I vettori peso vengono riportati in un grafico H_1 - H_2 detto diagramma dei pesi, disposti ai vertici di un triangolo che si dimostra facilmente equilatero:

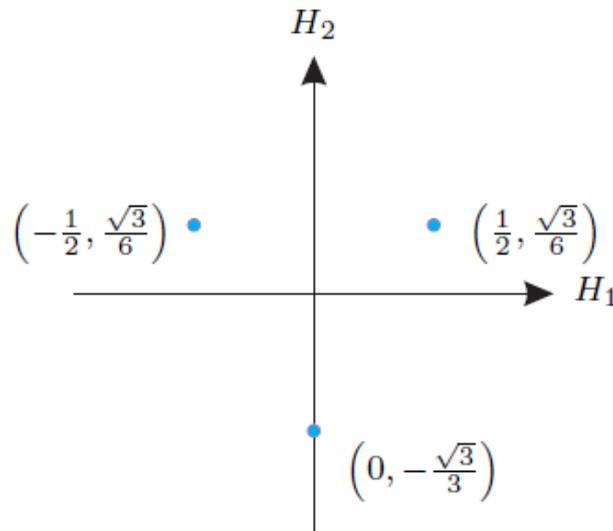


Figura 1. Rappresentazione 3 di SU(3)

Le radici devono essere differenze di pesi, perché i corrispondenti generatori devono portare da un peso all'altro. Ad esempio per l'operatore di salita di l-spin, l'Eq. 3-10 fornisce (l'apice tra parentesi quadre numera la radice, il pedice individua la specifica componente):

$$H_1 E_{\alpha^{[0]}} \left| \underbrace{H_1 = -\frac{1}{2}; H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}}_{\mu} \right\rangle = \left(\alpha_1^{[0]} - \frac{1}{2} \right) E_{\alpha^{[0]}} |\mu\rangle = \frac{1}{2} E_{\alpha^{[0]}} |\mu\rangle \Rightarrow \alpha_1^{[0]} = 1$$

Eq. 6-13

Mentre per il secondo generatore di Cartan H_2 (che ricordiamo essere T_8) non viene prodotto alcun effetto:

$$H_2 E_{\alpha^{[0]}} \left| \underbrace{H_1 = -\frac{1}{2}; H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}}_{\mu} \right\rangle = \left(\alpha_2^{[0]} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) E_{\alpha^{[0]}} |\mu\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} E_{\alpha^{[0]}} |\mu\rangle \Rightarrow \alpha_2^{[0]} = 0$$

Eq. 6-14

Di conseguenza il vettore radice per questa sottoalgebra è:

$$\alpha^{[0]} = [1, 0]$$

Eq. 6-15

E vista la corrispondenza “a vista” con $SU(2)$, ricavare gli operatori di salita e discesa di I-spin utilizzando T_1 e T_2 è immediato:

$$E^{[\pm 1, 0]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm iT_2)$$

Eq. 6-16

L'algebra di $SU(2)$ si completa allora definendo il terzo operatore:

$$E_3^{[1, 0]} = \frac{1}{|\alpha^{[0]}|^2} \alpha^{[0]} \cdot H = \frac{1}{1^2 + 0} [T_3 + 0T_8] = T_3$$

Eq. 6-17

Osservazione. L'azione dell'operatore di salita è evidente nella rappresentazione naturale di $SU(3)$ che abbiamo scelto, in cui vale:

$$\begin{aligned} E^{[+1, 0]} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & E^{[+1, 0]} &\propto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \Leftrightarrow & \\ E^{[-1, 0]} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & E^{[-1, 0]} &\propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eq. 6-18

Per analogia con le altre rappresentazioni si possono definire gli operatori di salita (discesa) per le rappresentazioni V-spin (radice β) e U-spin (radice σ):

$$E_\beta = E^{[\beta]^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5)$$

$$E_\sigma = E^{[\sigma]^\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7)$$

Eq. 6-19

I relativi operatori terzi possono essere calcolati, secondo l'Eq. 4-5 dai commutatori e utilizzando le costanti di struttura del gruppo):

$$E_3^{[\beta]} = [E^{[\beta]^+}, E^{[\beta]^-}] = \frac{1}{2}[T_4 + iT_5, T_4 - iT_5] = \frac{1}{2}\{[T_4, -iT_5] + [iT_5, T_4]\} = \frac{1}{2}2i[T_5, T_4] =$$

$$= i\left(-\frac{1}{2}iT_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}iT_8\right) = \frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_8$$

Eq. 6-20

Analogamente:

$$E_3^{[\sigma]} = [E^{[\sigma]^+}, E^{[\sigma]^-}] = i[T_7, T_6] = i\left(i\frac{1}{2}T_3 - i\frac{\sqrt{3}}{2}T_8\right) = -\frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_8$$

In analogia quindi con l'Eq. 6-17 ricaviamo quindi altre due radici (di cui la seconda non è positiva):

$$\frac{1}{|\beta|^2}\beta \cdot H = E_3^{[\beta]} = \frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_8 \Leftrightarrow \beta = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\frac{1}{|\sigma|^2}\sigma \cdot H = E_3^{[\sigma]} = -\frac{1}{2}T_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_8 \Leftrightarrow \sigma = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Eq. 6-21

Dal momento che sappiamo che il rango di SU(3) è pari a 2, evidentemente le tre radici non sono tutte linearmente indipendenti. Infatti $\alpha^{[0]} = \beta - \sigma$.

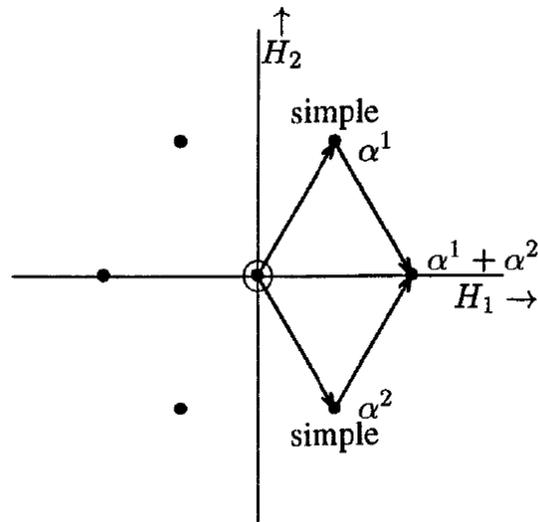
Quindi possiamo scegliere una rappresentazione per cui le due radici semplici (ricordando che il primo valore è positivo per definizione di radice semplice) sono:

$$\alpha^{[1]} = \beta = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\alpha^{[2]} = -\sigma = \left[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Eq. 6-22

Abbiamo quindi conferma del fatto che $\alpha^{[0]} = \alpha^{[1]} + \alpha^{[2]}$, somma di due radici semplici, come esplicitato nel seguente diagramma (in cui sono omesse le parentesi quadre):



e la relativa matrice di Cartan è:

$$C = \begin{pmatrix} 2 \frac{\left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]}{\left[\left(+\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]} & 2 \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\left[\left(+\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]} \\ 2 \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\left[\left(+\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]} & 2 \frac{\left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]}{\left[\left(+\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eq. 6-23

Così $p=1$ sia per $\alpha^{[1]}$ agente su $|\alpha^{[2]}\rangle$ sia viceversa, pertanto abbiamo la conferma che $\alpha^{[1]} + \alpha^{[2]}$ è una radice mentre $2\alpha^{[1]} + \alpha^{[2]}$ e $\alpha^{[1]} + 2\alpha^{[2]}$ non possono esserlo (non si può salire ulteriormente da $\alpha^{[1]} + \alpha^{[2]}$).

Vediamo adesso l'effetto degli operatori di salita e discesa relativi alle nuove radici. In analogia a quanto fatto nel caso Eq. 6-13 e Eq. 6-14 applicheremo $E_{\alpha^{[1]}}$ al peso $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

$$\begin{aligned}
H_1 E_{\alpha^{[1]}} \left| \underbrace{H_1 = 0; H_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\mu} \right\rangle &= (\alpha_1^{[1]} + 0) E_{\alpha^{[1]}} |\mu\rangle = \frac{1}{2} E_{\alpha^{[1]}} |\mu\rangle \\
H_2 E_{\alpha^{[1]}} \left| \underbrace{H_1 = 0; H_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\mu} \right\rangle &= \left(\alpha_2^{[1]} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) E_{\alpha^{[1]}} |\mu\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) E_{\alpha^{[1]}} |\mu\rangle = \frac{\sqrt{3}}{6} E_{\alpha^{[1]}} |\mu\rangle
\end{aligned}$$

Eq. 6-24

Dunque, come ci si immaginava, il vettore $E_{\alpha^{[1]}} \left| H_1 = 0; H_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$ è ancora autostato della sottoalgebra. Il suo peso è $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$.

Ripetendo l'esempio con $E_{\alpha^{[2]}}$, stavolta applicato al peso $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$:

$$\begin{aligned}
H_1 E_{\alpha^{[2]}} \left| \underbrace{H_1 = -\frac{1}{2}; H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}}_{\mu} \right\rangle &= \left(\alpha_1^{[2]} - \frac{1}{2} \right) E_{\alpha^{[2]}} |\mu\rangle = 0 E_{\alpha^{[2]}} |\mu\rangle \\
H_2 E_{\alpha^{[2]}} \left| \underbrace{H_1 = -\frac{1}{2}; H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}}_{\mu} \right\rangle &= \left(\alpha_2^{[2]} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) E_{\alpha^{[2]}} |\mu\rangle = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) E_{\alpha^{[2]}} |\mu\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} E_{\alpha^{[2]}} |\mu\rangle
\end{aligned}$$

Eq. 6-25

Dunque, il vettore $E_{\alpha^{[2]}} \left| H_1 = -\frac{1}{2}; H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle$ è ancora autostato della sottoalgebra con peso $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Possiamo allora riassumere le azioni di tutti gli operatori di salita e di discesa attraverso il seguente diagramma:

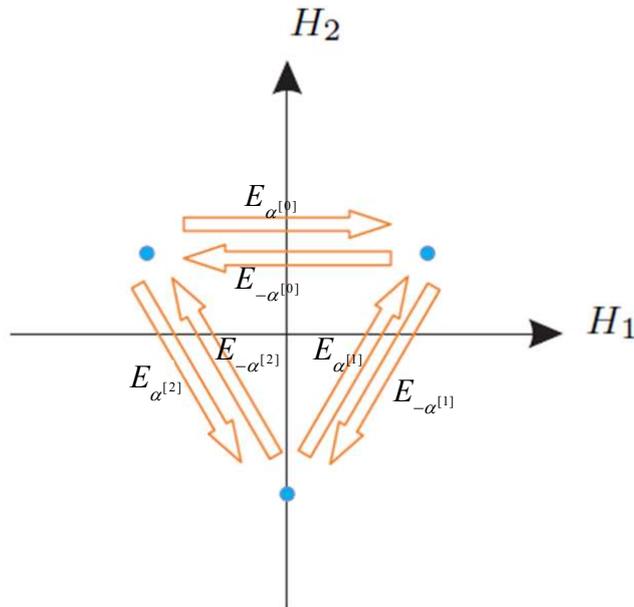


Figura 2. Azione degli operatori di innalzamento e di abbassamento sui tre stati SU(3)

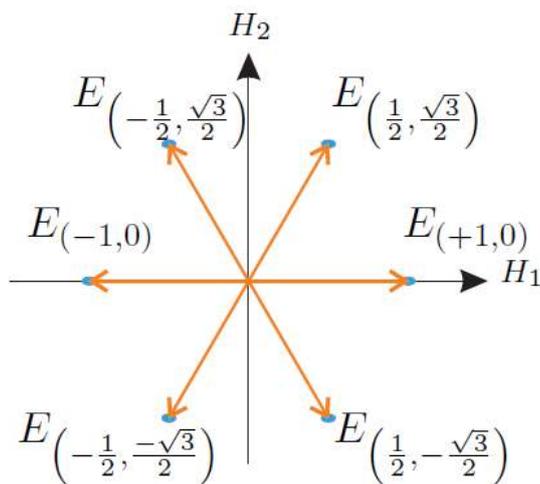


Figura 3. Operatori di abbassamento e innalzamento di SU(3)

In analogia con la nomenclatura relativa all'I-spin, le due restanti due rappresentazioni vengono chiamate di U-spin e V-spin.

7. Le due rappresentazioni fondamentali di SU(3)

Come abbiamo visto, proprio per il fatto di avere due radici semplici SU(3) ammette due rappresentazioni fondamentali, a differenza di SU(2).

Consideriamo per prima la rappresentazione fondamentale (1,0). Come abbiamo visto questa corrisponde a:

$$\mu_{\max}^{[1]} = 1\mu^{[1]} + 0\mu^{[2]}$$

Eq. 7-1

Dove per la definizione di pesi fondamentali:

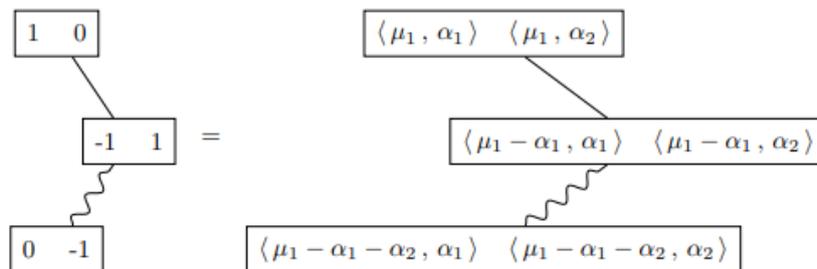
$$\begin{cases} \frac{\mu^{[1]} \cdot \alpha^{[1]}}{|\alpha^{[1]}|^2} = \frac{1}{2} \\ \mu^{[1]} \cdot \alpha^{[2]} = 0 \end{cases}$$

Eq. 7-2

$$\begin{cases} \mu_1^{[1]} \frac{1}{2} + \mu_2^{[1]} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \\ \mu_1^{[1]} \frac{1}{2} + \mu_2^{[1]} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu^{[1]} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

Eq. 7-3

Si applica quindi lo schema "di discesa" illustrato per i pesi per trovare tutti i pesi.



Per quanto riguarda invece la rappresentazione fondamentale (0,1) si applica lo stesso procedimento:

$$\mu_{\max}^{[2]} = 0\mu^{[1]} + 1\mu^{[2]}$$

Eq. 7-4

$$\begin{cases} \frac{\mu^{[2]} \cdot \alpha^{[1]}}{|\alpha^{[1]}|^2} = 0 \\ \mu^{[2]} \cdot \alpha^{[2]} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eq. 7-5

Sviluppando il sistema:

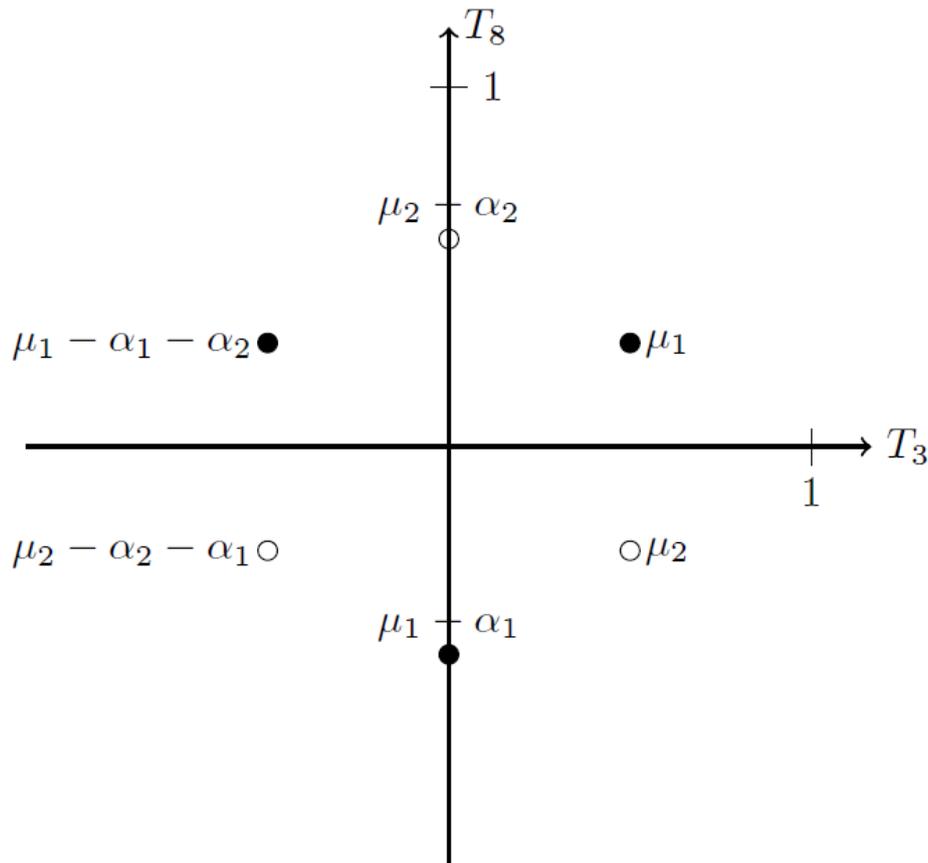
$$\begin{cases} \mu_1^{[2]} \frac{1}{2} + \mu_2^{[2]} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \mu_1^{[2]} \frac{1}{2} + \mu_2^{[2]} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \mu^{[2]} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

Eq. 7-6

Questa rappresentazione è indicata con il simbolo $\bar{3}$. Quindi:

$$\text{Rappresentazione } \bar{3}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

Si ottiene in definitiva il seguente diagramma riassuntivo di entrambe le rappresentazioni:



Si realizza che la $(1,0)$ ha gli stessi pesi della $(0,1)$ ma con i segni opposti. Questo significa in particolare che le due rappresentazioni sono collegate da una coniugazione complessa.

Vediamo che se T_a sono i generatori di una certa rappresentazione D di qualche algebra di Lie, allora anche $-T_a^+$ soddisfano le medesime regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= if_{abc} T_c \\ ([T_a, T_b])^+ &= (if_{abc} T_c)^+ = -if_{abc} T_c^+ \\ [T_a^+, T_b^+] &= if_{abc} (-T_c^+) \\ [-T_a^+, -T_b^+] &= if_{abc} (-T_c^+) \end{aligned}$$

Eq. 7-7

Questa la rappresentazione costruita con questi generatori è chiamata complesso coniugata della rappresentazione D , ed è sovente indicata come \bar{D} .

I generatori di Cartan della rappresentazione complesso coniugata sono ovviamente del tipo $-H_i^+$. Ricordando che $H_i^+ = H_i$ in quanto Hermitiani, i pesi di $-H_i^+$ saranno appunto pari ai pesi di $-H_i$, quindi opposti a quelli della rappresentazione di partenza. In generale si ha che:

$$D(m,n) \Leftrightarrow \bar{D}(n,m)$$

Eq. 7-8

Notazione. Si usa indicare una rappresentazione attraverso la dimensione e la relazione di coniugazione complessa.

$$3 \equiv (1,0) \quad \bar{3} \equiv (0,1)$$

Eq. 7-9

Rappresentazione	Peso più alto	Peso più basso
(n,m)	$n\mu^{[1]} + m\mu^{[2]}$	$-n\mu^{[2]} - m\mu^{[1]}$
(m,n)	$n\mu^{[2]} + m\mu^{[1]}$	$-n\mu^{[1]} - m\mu^{[2]}$

Come ulteriore esempio possiamo costruire con la tecnica dei massimi pesi e degli operatori di abbassamento la:

$$6 \equiv (2,0): \mu_{\max} = 2\mu^{[1]} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{e} \quad \bar{6} \equiv (0,2): \mu_{\max} = 2\mu^{[2]}$$

Eq. 7-10

In generale dati i due coefficienti di Dynkin (n,m) , il peso massimo della rappresentazione è $\mu_{\max} = n\mu^{[1]} + m\mu^{[2]}$.

Vediamo lo sviluppo della tecnica e il relativo diagramma dei pesi per la rappresentazione $(2,0)$:

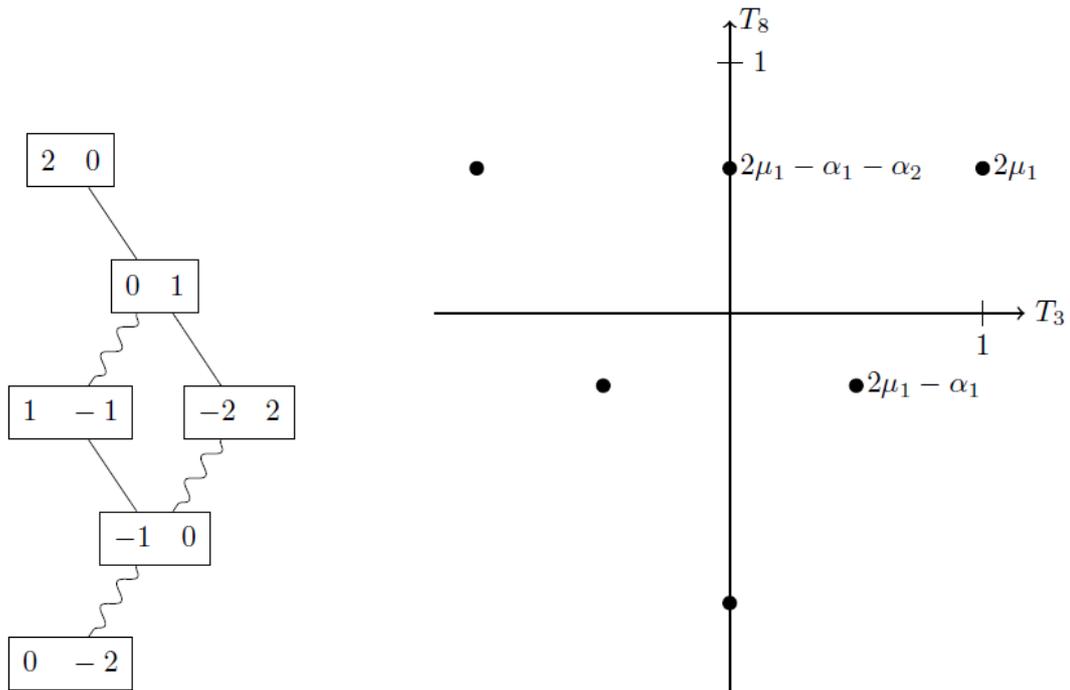


Figura 4. Costruzione della rappresentazione $(2,0) \cong 6$

Adesso il caso $(3,0)$:

$$10 \cong (3,0) \quad \text{e} \quad \bar{10} \cong (0,3)$$

Eq. 7-11

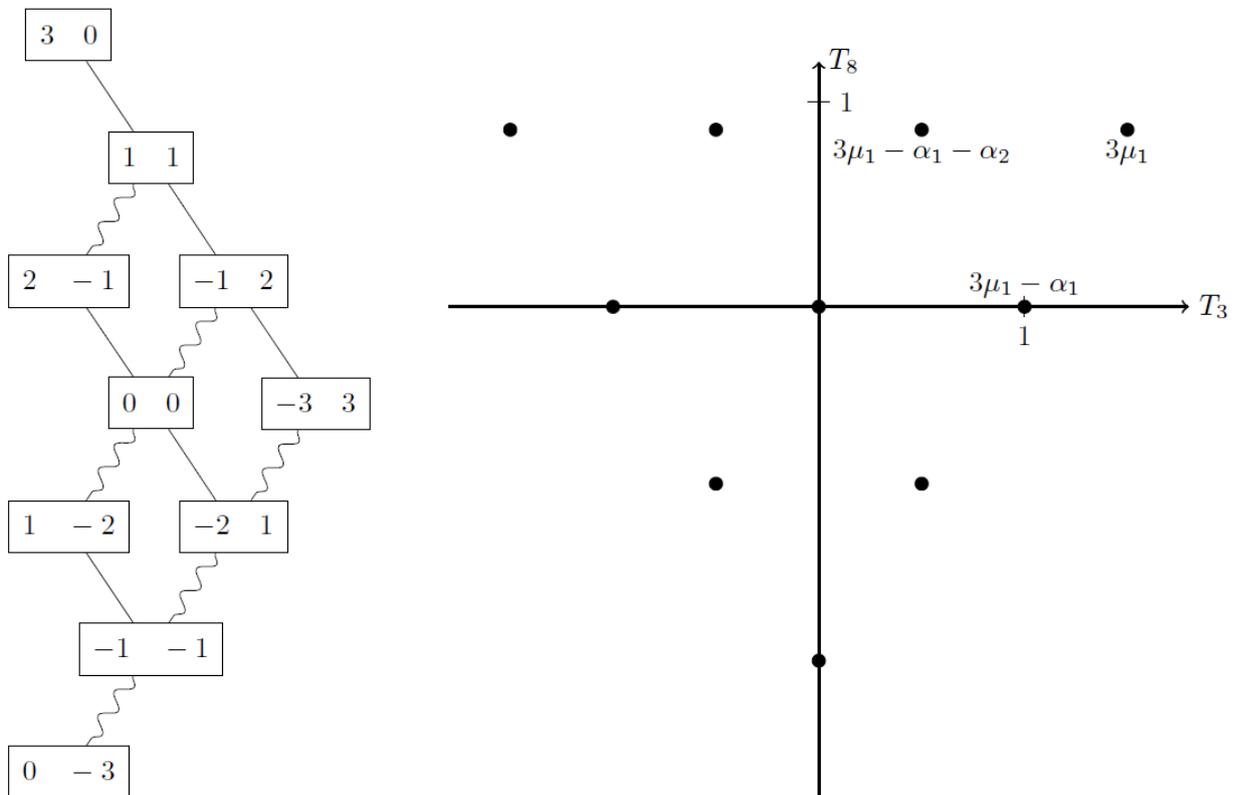


Figura 5. Costruzione della rappresentazione $(3,0) \cong 10$

Si dice reale una rappresentazione equivalente alla sua rappresentazione coniugata (il che accade ad esempio quando $n=m$). Ad esempio la:

$$8 \equiv (1,1)$$

Eq. 7-12

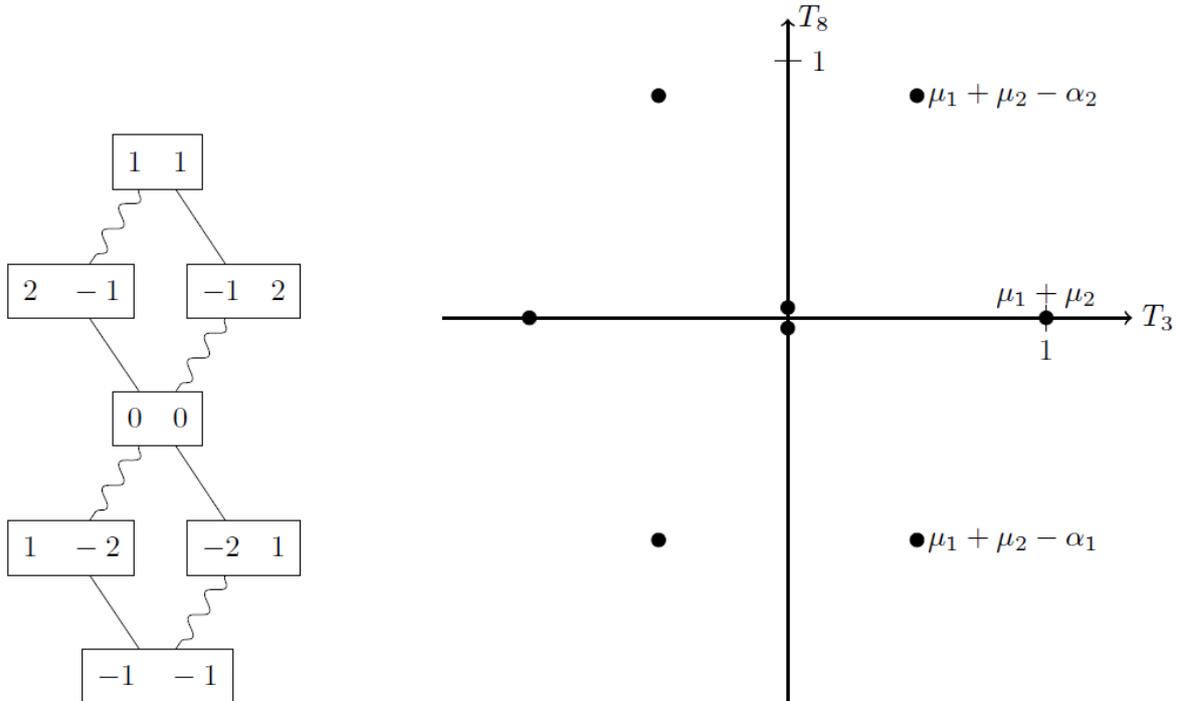


Figura 6. Costruzione della rappresentazione $(1,1) \cong 8$

8. Costruzione di tensori

In generale anche il prodotto tensoriale di rappresentazioni ammette una decomposizione: l'obiettivo è quello di individuare multipletti che sotto l'azione di $SU(3)$ non interagiscono: vale a dire, mediante applicazione di $SU(3)$ gli stati di un multipletto si mescolano unicamente tra loro senza interferire con altri stati.

Ci concentreremo su prodotti tensoriali degli stati delle rappresentazioni 3 e $\bar{3}$, utilizzando per i rispettivi pesi due notazioni che si trovano in letteratura:

Rappresentazione 3	Rappresentazione $\bar{3}$
$\left T_3 = \frac{1}{2}, T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = ^1_1\rangle$	$\left T_3 = -\frac{1}{2}, T_8 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = ^1_1\rangle$
$\left T_3 = -\frac{1}{2}, T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = ^2_2\rangle$	$\left T_3 = \frac{1}{2}, T_8 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = ^2_2\rangle$
$\left T_3 = 0, T_8 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = ^3_3\rangle$	$\left T_3 = 0, T_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = ^3_3\rangle$

Tabella 1. Notazione dei pesi per le due rappresentazioni naturali inequivalenti di $SU(3)$

Si osserva che il peso massimo della rappresentazione 3 si realizza attraverso $|_1\rangle$, mentre il peso massimo della $\bar{3}$ attraverso $|^2\rangle$.

Ormai è chiaro che la distinzione tra indici alti e bassi è utile perché abbiamo effettivamente necessità di distinguere le due differenti rappresentazioni tridimensionali di SU(3). Vediamo come l'utilizzo di questi indici rappresenti uno strumento per maneggiare l'azione dei generatori definendo:

$$[T_a]_j^i = \left[\frac{\lambda_a}{2} \right]_{ij}$$

Eq. 8-1

Allora il tripletto della rappresentazione 3 trasforma ovviamente come, nel linguaggio delle componenti:

$$[T_a(|_r\rangle)]_i = \left[\frac{\lambda_a}{2} \right]_{ik} (|_r\rangle)_k = \left[\frac{\lambda_a}{2} \right]_{ik} \delta_{rk} = \left[\frac{\lambda_a}{2} \right]_{ir}$$

Eq. 8-2

Quindi:

$$T_a(|_r\rangle) = \left[\frac{\lambda_a}{2} \right]_{ir} |_i\rangle$$

Eq. 8-3

Conviene allora introdurre una notazione con indice alto e basso, in modo da riproporre la saturazione di indici ripetuti e incrociati:

$$T_a(|_r\rangle) = |_i\rangle [T_a]_r^i$$

Eq. 8-4

In cui si è portato avanti il vettore per chiarire che adesso si sta lavorando con coefficienti di T . Questo obiettivo si raggiunge definendo quindi:

$$[T_a]_r^i = \left[\frac{\lambda_a}{2} \right]_{ir}$$

Eq. 8-5

Veniamo adesso alla rappresentazione complessa coniugata, partendo da come sono definiti i suoi generati.

$$[-T_a^+(|^r\rangle)]_i = \left[-\frac{\lambda_a^+}{2} \right]_{ik} (|^r\rangle)_k = \left[-\frac{\lambda_a^+}{2} \right]_{ik} \delta_{rk} = \left[-\frac{\lambda_a^+}{2} \right]_{ir} = \left[-\frac{\lambda_a}{2} \right]_{ri} = -[T_a]_i^r$$

Eq. 8-6

In cui l'ultima uguaglianza deriva dall' **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** E dunque:

$$-T_a^+ \left(\left| \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\rangle \right) = - \left| \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\rangle [T_a]_{ji}^r$$

Eq. 8-7

Così, se si costruisce uno stato mediante prodotto tensoriale di n rappresentazioni 3 ed m rappresentazioni $\bar{3}$:

$$\left| \begin{matrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} i_1 \\ j_1 \end{matrix} \right\rangle \dots \left| \begin{matrix} i_m \\ j_m \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} i_1 \\ j_1 \end{matrix} \right\rangle \dots \left| \begin{matrix} i_n \\ j_n \end{matrix} \right\rangle$$

Eq. 8-8

Questo oggetto si trasforma come:

$$\begin{aligned} T_a \left| \begin{matrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{matrix} \right\rangle &= \left| \begin{matrix} i_1 \\ j_1 \end{matrix} \right\rangle \dots \left| \begin{matrix} i_m \\ j_m \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} i_1 \\ j_1 \end{matrix} \right\rangle \dots \left| \begin{matrix} i_n \\ j_n \end{matrix} \right\rangle = \\ &= \sum_{l=1}^n \left| \begin{matrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_{l-1} \ k \ j_{l+1} \dots j_n \end{matrix} \right\rangle [T_a]_{jl}^k - \sum_{l=1}^m \left| \begin{matrix} i_1 \dots i_{l-1} \ k \ i_{l+1} \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{matrix} \right\rangle [T_a]_{lk}^{i_l} \end{aligned}$$

Eq. 8-9

Questo perché l'operatore agisce singolarmente sui singoli stati che compongono il prodotto tensoriale, nei due modi differenti visti in funzione della rappresentazione definita dalla posizione del singolo indice.

Definizione. Tensore: un arbitrario stato in uno spazio tensoriale. Questo potrà essere quindi scritto come:

$$\left| \nu \right\rangle = \nu_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \left| \begin{matrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{matrix} \right\rangle$$

Eq. 8-10

Le componenti del tensore si ricavano considerando il prodotto scalare:

$$\nu_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = \left\langle \begin{matrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{matrix} \left| \nu \right\rangle \right\rangle$$

Eq. 8-11

In questo modo è possibile descrivere l'azione dei generatori su un tensore mediante l'azione sulle componenti tensoriali. Riprendendo la Eq. 8-9:

$$T_a \nu_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = \sum_{l=1}^m [T_a]_{lk}^{i_l} \nu_{i_1 \dots i_{l-1} \ k \ i_{l+1} \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} - \sum_{l=1}^n [T_a]_{jl}^k \nu_{i_1 \dots i_{l-1} \ k \ i_{l+1} \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$$

Eq. 8-12

Siano adesso dati due tensori:

$$|u\rangle = \left| \begin{matrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{matrix} \right\rangle u_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}$$

$$|v\rangle = \left| \begin{matrix} i'_1 \dots i'_p \\ j'_1 \dots j'_q \end{matrix} \right\rangle v_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q}$$

Eq. 8-13

Allora il prodotto tensoriale è dato da:

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \left| \begin{matrix} i_1 \dots i_m \\ j_1 \dots j_n \end{matrix} \right\rangle \left| \begin{matrix} i'_1 \dots i'_p \\ j'_1 \dots j'_q \end{matrix} \right\rangle u_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} v_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q}$$

Eq. 8-14

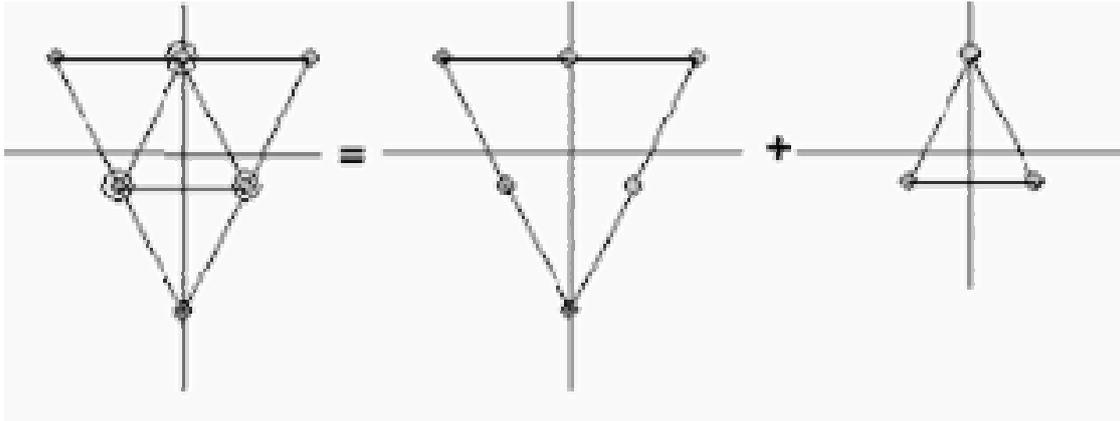
Chiaramente si tratta di un oggetto riducibile, che può essere decomposto in somma di rappresentazioni irriducibili. Vediamo alcuni esempi.

3 ⊗ 3

Per questa decomposizione possiamo agire in molti modi. Il primo è far ricorso alle sottoalgebre di SU(2) definite rispettivamente I-spin, U-spin e V-spin e individuarne i tre tripletti (simmetrici) e i tre singoletti (antisimmetrici). Ovviamente due coppie di tripletti condividono un elemento in comune. In questo modo individuiamo rispettivamente 6+3 stati.

Stati ricavabili dai tripletti simmetrici	Stati ricavabili dai singoletti antisimmetrici
$ _{11}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [_{12}\rangle - _{21}\rangle]$
$\frac{1}{\sqrt{2}} [_{12}\rangle + _{21}\rangle]$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [_{23}\rangle - _{32}\rangle]$
$ _{22}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}} [_{31}\rangle - _{13}\rangle]$
$\frac{1}{\sqrt{2}} [_{23}\rangle + _{32}\rangle]$	
$ _{33}\rangle$	
$\frac{1}{\sqrt{2}} [_{31}\rangle + _{13}\rangle]$	

Il risultato è riproducibile anche in forma grafica, costruendo i triangoli corrispondenti alla seconda rappresentazione 3 rispettivamente sui vertici della prima:



I punti intermedi del triangolo ottenuto hanno molteplicità 2, in quanto sono raggiungibili sia mediante combinazioni simmetriche che antisimmetriche. In conclusione possiamo scrivere:

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \Rightarrow (1,0) \otimes (1,0) = (2,0) \oplus (0,1)$$

Eq. 8-15

Al medesimo risultato si può arrivare anche lavorando con le componenti tensoriali, ricordando la decomposizione:

$$\begin{aligned} u^i v^j &= \frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2}(u^i v^j - u^j v^i) = \\ &= \frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} u^l v^m \end{aligned}$$

Eq. 8-16

In cui si può riconoscere nel termine:

$$\varepsilon_{klm} u^l v^m$$

una trasformata di Hodge del tensore a due indici (si può mostrare che il tensore completamente antisimmetrico è invariante sotto azione di SU(3)). Avendo un solo indice basso il termine è controvariante, ossia si trasforma appunto come $\bar{3}$.

L'ultimo modo per individuare gli stati della rappresentazione è quello di utilizzare il metodo dei pesi massimi per ricavare gli stati nel prodotto tensoriale che corrisponde alla rappresentazione irriducibile (n,m), che qui non sviluppiamo.

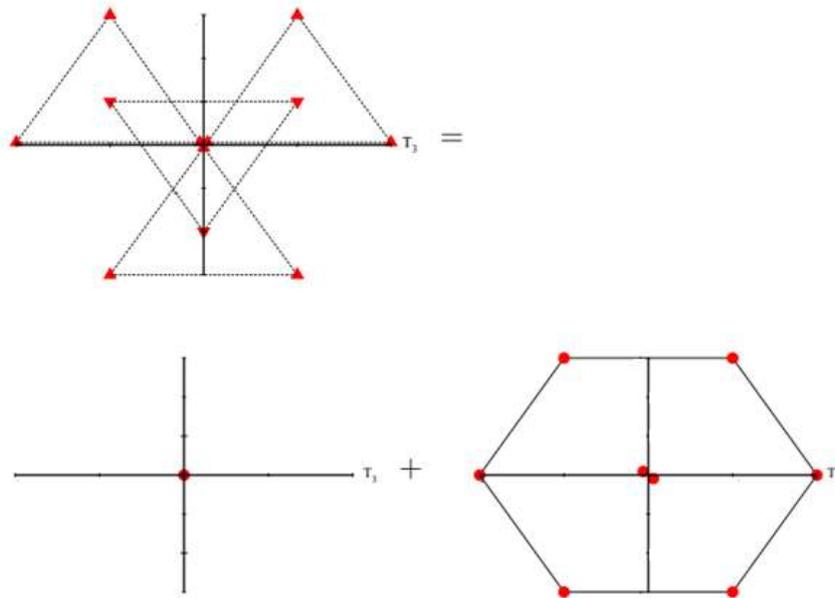
$3 \otimes \bar{3}$

In questo caso basta osservare che si sta componendo un vettore controvariante (indice alto) con uno covariante (indice basso). Il conseguente prodotto tensoriale non è quindi irriducibile in quanto la traccia è invariante sotto SU(3), e pertanto rappresenta il singoletto. La decomposizione è quindi presto fatta:

$$u^i v_j = \left(u^i v_j - \frac{1}{3} u^k v_k \delta_j^i \right) + \frac{1}{3} u^k v_k \delta_j^i$$

Eq. 8-17

In forma grafica con il metodo della sovrapposizione si traduce come:



E pertanto potremo scrivere:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \Rightarrow (1,0) \otimes (1,0) = (1,1) \oplus (0,0)$$

Eq. 8-18

$$3 \otimes 3 \otimes 3$$

Scriviamo infine, senza dimostrarlo, il risultato utile per la composizione di 3 quark:

$$\begin{aligned} 3 \otimes 3 \otimes 3 &= (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = 6 \otimes 3 + \bar{3} \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \\ &\Rightarrow (1,0) \otimes (1,0) \otimes (1,0) = (3,0) \oplus (1,1) \oplus (1,1) \oplus (0,0) \end{aligned}$$

Eq. 8-19

Indice delle voci

Algebra	
di Lie.....	3
di Lie compatta	4
semisemplice	4
semplice.....	4
Backer-Campbell-Hausdorff, formula di.....	3
Cartan	
matrice di.....	16
Commutatore	3
Costanti di struttura.....	3
Dynkin	
coefficienti di	19
Generatori del gruppo.....	2
Gruppo di Lie	2
Identità di Jacobi.....	3
isospin	
gruppo di	22
Lemma di Schur	2
Master formula.....	10
Operatori	
di abbassamento	6
di innalzamento	6
Operatori di Casimir.....	4
Operatori hermitiani.....	2
Pesi	
comparazione dei	4
fondamentali	19
Peso più alto.....	4
Radici	6
positive e negative.....	6
semplici.....	12
Rango.....	4
Rappresentazione	1
aggiunta	5
complesso coniugata	31
completamente riducibile	1
degenere.....	1
di gruppo finito	1
fedele.....	1
reale.....	34
riducibile	1
unitaria	1
Rappresentazioni fondamentali.....	20
Somma diretta	
di rappresentazioni.....	1
Sottoalgebra	
di Cartan	4
invariante.....	4
invariante abeliana	4
rango.....	4

Tensore	36
componenti del.....	36
Vettore peso	4
positivo	4

Referenze

- [1] Georgi, H. “Lie Algebras in Particle Physics – From Isospin to Unified Theories”, Westview Press, 1999 – Second Edition
- [2] Koerber, C. “Lie Algebra Representation Theory – SU(3)- Representations in Physics”, North Carolina State University MA 725 - Dec. 2013
- [3] Carlucci, V. “Modello a Quark: Simmetrie Unitarie e Spettroscopia Mesonica”, Università degli Studi di Bari, tesi di laurea, A.A. 2006/2007, relatore Chiar.mo Prof. Giuseppe Nardulli