

5. TRASLAZIONI

Introduzione

Partiremo anche in questo caso ricordando che una generica trasformazione infinitesima può essere descritta da una funzione generatrice di seconda specie del tipo:

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t)$$

5-1

Dove è ormai noto che il termine $q_i P_i$ rappresenta l'identità. Vogliamo adesso studiare il caso della traslazione delle q :

$$\begin{cases} Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \\ P_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \end{cases}$$

5-2

Risulta allora evidente che una funzione generatrice candidata potrà essere:

$$F_2 = q_i P_i + \epsilon P_i$$

5-3

In cui ancora il primo termine rappresenta l'identità. A questo punto sarebbe sufficiente riproporre lo schema applicato a suo tempo per comprendere il ruolo dell'Hamiltoniana nell'evoluzione temporale, ma qui intendiamo esplicitare tutti i passaggi del caso in esame sviluppando a partire dal formalismo della meccanica quantistica, ossia partendo dalla descrizione dell'effetto di una traslazione infinitesima su un autostato della posizione. Nel caso unidimensionale:

$$|x\rangle \xrightarrow{\text{traslazione}} |x + \epsilon\rangle$$

5-4

I postulati della meccanica quantistica ci portano a ipotizzare che esista quindi un operatore unitario di traslazione:

$$T(\epsilon)|x\rangle = |x + \epsilon\rangle$$

5-5

Tale operatore soddisferà i seguenti requisiti:

1. Unitarietà: $T^+(dx')T(dx') = \mathbf{1}$;
2. Composizione: $T(dx'')T(dx') = T(dx' + dx'')$;
3. Inversione: $T^{-1}(dx') = T(-dx')$;
4. Limite: $\lim_{dx \rightarrow 0} T = \mathbf{1}$

5-6

La 1. deriva dal fatto che banalmente uno stato traslato mantiene il suo modulo:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | T^+(dx')T(dx') | \alpha \rangle$$

5-7

Mentre la 2. è una condizione da imporre per assicurare la corretta legge di composizione di più traslazioni successive, la 3. è conseguenza diretta della 1. La 4. È banale e garantisce la convergenza verso l'identità di questo operatore, al limite della traslazione tendente a zero.

Sulla base delle proprietà richieste si deduce quindi che la forma dell'operatore di traslazione infinitesima sarà pertanto:

$$T(dx') = \mathbf{1} - iK \cdot dx'$$

5-8

con K Hermitiano. Ovviamente l'estensione a tre dimensioni è immediata. Confrontando con la 5-3 emerge che K è direttamente legato all'impulso; tuttavia l'operatore nel suo complesso non può essere adimensionale se non è riscalato ancora mediante una costante che abbia le dimensioni di un'azione, il cui valore numerico non è però desumibile dagli attuali postulati della meccanica quantistica. Possiamo allora azzardare la scelta, forti anche dei risultati sull'iconale:

$$K = \frac{p}{\hbar}$$

5-9

Confrontiamo adesso l'effetto di calcolare in cascata prima l'operatore di traslazione e quello di posizione e viceversa; in altre parole, valutiamo il commutatore tra l'operatore di posizione e quello di traslazione su un certo autostato della posizione.

$$\begin{aligned} [X, T(dx)]|x\rangle &= (XT(dx) - T(dx)X)|x\rangle = X|x + dx\rangle - T(dx)x|x\rangle = (x + dx - x)|x + dx\rangle \\ &= dx|x + dx\rangle \end{aligned}$$

5-10

Si potrà scrivere allora:

$$[X, T(dx)]|x\rangle \approx dx|x\rangle$$

Perché l'errore che si commette è dell'ordine di dx^2 . Ri assemblando il tutto si ottiene che:

$$[X, \mathbf{1} - iK \cdot dx] = [X, -iK \cdot dx] = dx\mathbf{1}$$

Quindi:

$$[X, K] = i$$

Segue pertanto la regola di commutazione della quantizzazione canonica, nel caso monodimensionale:

$$[X, P] = i\hbar$$

Da questa relazione di non commutazione deriva l'impossibilità di trovare autostati simultanei della posizione e dell'impulso. L'espressione precedente si estende al caso multidimensionale, considerando che quando sono riferiti ad assi normali differenti, gli operatori posizione e impulso commutano tra di loro:

$$[X^i, P_j] = i\hbar\delta_j^i$$

Principio di indeterminazione

Vogliamo adesso dimostrare che il risultato del commutatore tra posizione e impulso, e più in generale tra due grandezze che non commuta, portano ad un'indeterminazione simultanea delle osservabili che si esprime attraverso una disuguaglianza. A tal proposito data una certa osservabile A definiamo per prima cosa l'operatore detto di dispersione

$$\Delta A = A - \langle A \rangle$$

Il valore di aspettazione di $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ su un certo stato fisico prende il nome di dispersione di A :

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

Date due osservabili A e B si può allora dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2$$

5-18

Questa disuguaglianza si può dimostrare a partire dalla disuguaglianza di Schwarz. Segue pertanto che per gli operatori posizione e impulso vale la relazione:

$$\langle(\Delta X)^2\rangle\langle(\Delta P)^2\rangle \geq \frac{1}{4} \hbar^2$$

5-19

Che rappresenta il noto principio di indeterminazione di Heisenberg.

Come ultimo determiniamo la forma di una traslazione di una quantità finita Δx :

$$T(\Delta x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} - i \frac{p \Delta x}{\hbar N} \right)^N = e^{-i \frac{p \Delta x}{\hbar}}$$

5-20

Bibliografia

J.J.Sakurai , “Meccanica Quantistica Moderna”.

H. Goldstein *et al.*, “Meccanica Classica”

Indice delle voci

autostati: simultanei; 3

commutatore; 2

dispersione: operatore di; 3

Heisenberg: principio di indeterminazione di; 4

Schwarz: disuguaglianza di; 4