6. FORMULAZIONE DI FEYNMAN: INTEGRALE SUI CAMMINI

Introduzione

In questa sezione mostriamo che il principio di minima azione e le regole di commutazione canoniche possono essere dedotte anche a partire dall'integrazione dei cammini; per fare questo sarà necessario introdurre i principali aspetti di questa formulazione.

Ampiezza di transizione

Cominciamo studiando un semplice sistema unidimensionale, descritto dalla variabile dinamica q e dal relativo impulso p. Sappiamo che se ad un certo istante il sistema si trova in un autostato della posizione $|q_A\rangle$, allora l'ampiezza di transizione ad un nuovo autostato $|q_B\rangle$ dopo un tempo Δt è data da:

$$G = \left\langle q_B \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t} \middle| q_A \right\rangle$$

6-1

In cui *H* è l'Hamiltoniana del sistema, che in generale può essere composta da parti che non commutano tra loro, come ad esempio la parte cinetica e quella potenziale della particella classica. Volendo considerare questo caso, scriveremo un'Hamiltoniana a dipendenze separate:

$$H = K(p) + V(q)$$

6-2

Per quanto segue ci sarà utile scrivere, considerando uno sviluppo al primo ordine nel tempo.

$$e^{-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon} = e^{-\frac{i}{\hbar}V\varepsilon} e^{-\frac{i}{\hbar}K\varepsilon} + o(\varepsilon^2)$$

6-3

Un risultato analogo si ottiene invertendo l'ordine degli addendi. L'idea è quella di suddividere l'intervallo di tempo Δt in *N* sottointervalli in modo che $\varepsilon = \Delta t/N$. Da questo segue:

$$\begin{aligned}\left\langle q_N \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t} \middle| q_0 \right\rangle &= \int dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1} \left\langle q_N \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon} \middle| q_{N-1} \right\rangle \left\langle q_{N-1} \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon} \middle| q_{N-2} \right\rangle \dots \left\langle q_1 \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon} \middle| q_0 \right\rangle \\ &= \int dq_1 \dots dq_{N-1} \prod_{k=1}^{N} \left\langle q_k \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon} \middle| q_{k-1} \right\rangle\end{aligned}$$

6-4

Per ogni fattore il contributo del termine dipendente dalla posizione si estrae, in quanto diagonale:

$$\left\langle q_k \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon} \middle| q_{k-1} \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}V(q_k)\varepsilon} \left\langle q_k \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon} \middle| q_{k-1} \right\rangle$$

6-5

Mentre il contributo dell'operatore $e^{-\frac{i}{\hbar}K\varepsilon}$ si calcola nello spazio degli impulsi, dove invece è diagonale p:

$$\left\langle q_k \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon} \middle| q_{k-1} \right\rangle = \iint dp' dp e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon} \langle q_k | p' \rangle \left\langle p' \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon} \middle| p \right\rangle \langle p | q_{k-1} \rangle$$
$$= \int dp e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon} \langle q_k | p \rangle \langle p | q_{k-1} \rangle = \int dp e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon} e^{ip(q_k - q_{k-1})} = \int dp e^{i\varepsilon\left[-\frac{1}{\hbar}K(p) + p\frac{(q_k - q_{k-1})}{\varepsilon}\right]}$$

6-6

Nell'ultimo passaggio è possibile effettuare la sostituzione:

$$\frac{q_k - q_{k-1}}{\varepsilon} \approx \dot{q}_k$$

6-7

Si ottiene quindi:

$$\left\langle q_N \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t} \middle| q_0 \right\rangle = \int \prod_{k=1}^{N} dp_k dq_k \, e^{i\varepsilon \sum_{k=1}^{N}\left[p_k \dot{q}_k - \frac{H}{\hbar}(q_k, p_k)\right]}$$

6-8

Nel limite $N \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ e avendo cura di definire la misura di integrazione in modo opportuno si ottiene un integrale sui cammini, poiché l'insieme dei punti $q_1, q_2 \dots, q_{N-1}$ e $p_1, p_2 \dots, p_{N-1}$ formano tutte le traiettorie possibili dal punto iniziale q_0 al punto finale q_N.

$$\left\langle q_N \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t} \middle| q_0 \right\rangle = \int d[q(t)] d[p(t)] e^{i\int_0^T \left[p\dot{q} - \frac{H}{\hbar}(q,p)\right] dt}$$

6-9

L'integrale funzionale $d[q(t)]$ è sull'insieme di tutte le possibili traiettorie di $q(t)$, mentre l'integrale su $d[p(t)]$ è sull'insieme delle traiettorie di $p(t)$. Riconosciamo inoltre nell'esponente l'azione espressa nella formulazione hamiltoniana, che come sappiamo tratta coordinate e momenti coniugati in modo equivalente (motivo per cui l'integrale sui cammini si estende su entrambe le variabili).

$$\int_0^T [p\dot{q} - H(q,p)] dt = S[q(t), p(t)]$$

6-10

Fin qui nulla è stato volutamente detto sulla forma di $K(p)$, che pertanto può essere la più generale possibile (purché Fourier-trasformabile). Si può osservare che integrale 6-6 è formalmente una trasformata di Fourier della funzione $e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon}$, con la variabile p come quella su cui avviene l'integrazione e $q_k - q_{k-1}$ come parametro "spaziale".

$$\left\langle q_N \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t} \middle| q_0 \right\rangle = \int dq_1 \dots dq_{N-1} \prod_{q_k} \Im\left[e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon}\right] e^{-\frac{i}{\hbar}V(q_k)\varepsilon}$$

6-11

Dopo aver eseguito questa trasformata si ottiene un'azione che dipende solo dalla variabile q: questo è ciò che permette di passare dalla formulazione hamiltoniana (che include p e q) alla formulazione lagrangiana (che include solo q e $\dot{q}$). Si può apprezzare questo nel caso semplice di Hamiltoniana classica, in cui:

$$\left\langle q_k \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}K(p)\varepsilon} \middle| q_{k-1} \right\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\varepsilon^2}\right)\varepsilon} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2}mv_k^2\right)\varepsilon}$$

6-12

In questo caso, il fattore $\sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}}$ viene assorbito nella misura di integrazione (un fattore per ogni sottointervallo).

La formula precedente deriva dal fatto che la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana; ciò si può mostrare ad esempio nel dominio di una generica variabile x, tramite la tecnica di completamento del quadrato all'esponente:

$$\Im\left[e^{-\alpha x^2}\right] = \int e^{-\alpha x^2} e^{-ikx}\, dx = e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \int e^{-\alpha\left(x + \frac{ik}{2\alpha}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

6-13

Per inciso, se la larghezza della gaussiana nel dominio x è $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ allora la larghezza della gaussiana nel dominio k è $\sqrt{\alpha}$. Questo è un esempio del principio di indeterminazione: una funzione "stretta" in un dominio è larga nell'altro.

Tornando al risultato principale, nella formulazione Lagrangiana si verifica quindi:

$$\left\langle q_N \middle| e^{-\frac{i}{\hbar}H\Delta t} \middle| q_0 \right\rangle = \int d[q(t)] e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]}$$

6-14

Questo significa che l'ampiezza di transizione è calcolata come la somma dei contributi dei funzionali d'azione applicati come fase. L'equazione pone però un problema di convergenza, in quanto i termini di fase hanno tutti modulo unitario. Un modo per superare questa difficoltà è cambiare la variabile di integrazione, passando da un tempo puramente reale ad una variabile temporale definita su piano complesso, mediante la rotazione:

$$t = e^{-i\chi}\tau = (\cos\chi - i\,\mathrm{sen}\chi)\tau$$

6-15

In questo modo:

$$dt = e^{-i\chi}d\tau, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{e^{-i\chi}d\tau}$$

6-16

E l'azione per la Lagrangiana di particella classica diventa:

$$S_\chi = \int dt \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q)\right] = \int e^{-i\chi}d\tau \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - V(q)\right] = \int e^{-i\chi}d\tau \left[\frac{1}{2}m\frac{1}{e^{-i2\chi}}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q)\right]$$
$$= \int d\tau \left[\frac{1}{2}m\frac{1}{e^{-i\chi}}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - e^{-i\chi}V(q)\right]$$

6-17

Quando si considera $\chi = \frac{\pi}{2}$ si passa ad una variabile temporale immaginaria pura, e la trasformazione prende nome di rotazione di Wick; in questo caso l'azione prende nome di azione Euclidea, e il calcolo della fase restituisce:

$$iS_\chi = \int d\tau \left[-\frac{1}{2}m\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q)\right]$$

6-18

In questo modo la convergenza dell'integrazione sui cammini dipende dalla forma di $V(q)$.

L'eq. 6-14 fornisce un diverso punto di vista per comprendere il principio di minima azione: supponendo infatti l'esistenza di una traiettoria tale da rendere estrema la S, traiettorie a questa "vicine" contribuiscono all'integrale con fasi che interferiscono costruttivamente, in quanto non troppo dissimili a quella della traiettoria per cui $\delta S = 0$. Il parametro $\hbar$ diventa pertanto una misura della differenza tra le fasi: traiettorie che sfasano l'azione in quantità inferiore a questa costante saranno dominanti e contribuiranno insieme a determinare il valore dell'integrale, mentre traiettorie maggiormente sfasanti tenderanno a cancellare i propri contributi; per questo motivo nel limite classico in cui $\hbar \to 0$ il sistema può essere descritto attraverso da un'unica traiettoria. Ovviamente questa tecnica, mostrata per un unico grado di libertà, può essere prima estesa al caso di N gradi, per poi ulteriormente venire applicata alla teoria dei campi, in cui il singolo grado di libertà è individuato dallo specifico punto dello spazio tempo, e il relativo valore del campo è la variabile: in tal caso parleremo di un numero infinito di gradi libertà.

Bibliografia

[1] D. Antonov, "Nonperturbative methods in gauge theories", Pisa University Press, 2013

[2] J. Zinn-Justin, "Path Integrals in Quantum Mechanics", Oxford University Press, 2005

[3] N. Cabibbo, L. Maiani, O. Benhar, "Introduzione alle teorie di gauge", Editori Riuniti, 2016

Indice delle voci