8. PASSAGGIO ALLA TEORIA DI CAMPO QUANTISTICA

Introduzione

Nel passaggio alla teoria di campo i gradi di libertà di un sistema diventano infiniti, e il valore delle coordinate diventa l'etichetta che identifica lo specifico grado. In altre parole, mentre in meccanica quantistica quantizziamo un numero finito di coordinate dinamiche, nella teoria di campo l'oggetto quantizzato è proprio il campo che è una funzione dello spazio-tempo, da cui il numero infinito di gradi di libertà.

Dal funzionale generatore al propagatore

Per costruire una teoria di campo possiamo cominciare dalla definizione di una Lagrangiana, che per essere valida deve restituire le corrette equazioni del moto attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange. Prendendo come esempio il caso dell'equazione d'onda di Klein Gordon per un campo reale scalare:

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

8-1

Una densità Lagrangiana idonea potrà essere:

$$L = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right)$$

8-2

Questa scelta di densità lagrangiana non è unica, ma è la più semplice che riproduca l'equazione di Klein–Gordon come equazione di Eulero–Lagrange. Il suo carattere quadratico nel campo sarà cruciale per la costruzione esplicita del funzionale generatore.

In questo caso dunque l'azione assume la forma:

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^4x\left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right)$$

8-3

Un'azione di questo tipo può essere manipolata operando un'integrazione per parti e le proprietà di annullamento che assumiamo valere all'infinito. L'obiettivo di questa manipolazione è riscrivere l'azione in una forma esplicitamente quadratica nel campo, in modo da rendere l'integrazione funzionale formalmente analoga a un integrale gaussiano in dimensione infinita. Per il primo termine dunque:

$$\int d^4x\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right) = \phi\partial^\mu\phi|_\infty - \int d^4x\left(\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi\right)$$

8-4

Il che permette di ricondursi ad una forma quadratica:

$$S[\phi] = -\frac{1}{2}\int d^4x\left(\phi\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi\right) = -\frac{1}{2}\int d^4x[\phi(x)K\phi(x)]$$

8-5

Dove si è ovviamente posto:

$$K = \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)$$

8-6

Quanto scritto serve da base per sviluppare un nuovo funzionale che prende il nome di funzionale generatore, il cui argomento sarà una nuova funzione $J(x)$.

$$Z[J] = \int d[\,\phi]e^{i\{S[\phi]-\int d^4xJ(x)\phi(x)\}}$$

8-7

In cui l'integrazione è effettuata su tutte le possibili configurazioni del campo. Il campo esterno $J(x)$non rappresenta una sorgente fisica reale, ma è uno strumento matematico: introducendolo, rendiamo accessibili le funzioni di correlazione come derivate funzionali del funzionale generatore.

Manipoliamo l'integrando:

$$\int d^4x[\phi K\phi + 2\phi J + K^{-1}J^2 - K^{-1}J^2] = \int d^4x[(\phi K\phi + \phi J + J\phi + K^{-1}J^2) - K^{-1}J^2]$$

8-8

Si inseriscono opportunamente coppie ininfluenti al risultato complessivo:

$$\int d^4x[(\phi K\phi + \phi J + J\phi + K^{-1}J^2) - K^{-1}J^2] =$$
$$= \int d^4x\left[\left(\phi K\phi + \phi\underbrace{KK^{-1}}_{1}J + \left(\underbrace{KK^{-1}}_{1}J\right)\phi + K^{-1}J\underbrace{KK^{-1}}_{1}J\right) - K^{-1}J\underbrace{KK^{-1}}_{1}J\right]$$

8-9

Il terzo elemento della somma può essere trasformato utilizzando due volte la regola di integrazione per parti, con opportune ipotesi sull'andamento delle funzioni all'infinito:

$$\int d^4x\left(\underbrace{KK^{-1}}_{1}J\right)\phi = \int d^4x\left(\underbrace{[(\partial_\mu\partial^\mu)K^{-1}]}J + m^2(K^{-1}J)\right)\phi = \underbrace{[(\partial^\mu)K^{-1}J]\phi|_\infty}_{=0} + \int d^4xm^2(K^{-1}J)\phi$$
$$-\int d^4x[(\partial^\mu)K^{-1}J]\partial_\mu\phi =$$

$$= \int d^4x (K^{-1}J) m^2 \phi - \underbrace{K^{-1}J \partial_\mu \phi|_\infty}_{=0}$$
$$+ \int d^4x [K^{-1}J] \partial_\mu \partial^\mu \phi = \int d^4x [K^{-1}J] \big(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\big) \phi = \int d^4x [K^{-1}J] K\phi$$

8-10

Cosicché l'integrale complessivo all'esponente diventa:

$$\int d^4x [(\phi K\phi + \phi J + J\phi + K^{-1}J^2) - K^{-1}J^2]$$
$$= \int d^4x \left[\left(\phi K\phi + \phi \underbrace{KK^{-1}}_{1} J + (K^{-1}J)(K\phi) + K^{-1}J \underbrace{KK^{-1}}_{1} J \right) - K^{-1}J \underbrace{KK^{-1}}_{1} J \right] =$$
$$= \int d^4x [\phi (K\phi + KK^{-1}J) + (K^{-1}J)(K\phi + KK^{-1}J) - K^{-1}JKK^{-1}J] =$$
$$= \int d^4x [(\phi + K^{-1}J)(K\phi + KK^{-1}J) - K^{-1}JKK^{-1}J] = \int d^4x [(\phi + K^{-1}J) K (\phi + K^{-1}J) - K^{-1}JKK^{-1}J]$$

8-11

Ritornando al funzionale generatore con l'esponente così calcolato, si può estrarre fuori dall'integrale funzionale un coefficiente non dipendente dai vari cammini:

$$Z[J] = \int d[\phi] e^{-\frac{i}{2}\{\int d^4x [(\phi + K^{-1}J)K(\phi + K^{-1}J) - K^{-1}JKK^{-1}J]\}}$$
$$= e^{+\frac{i}{2}\int d^4x (K^{-1}JKK^{-1}J)} \int d[\phi] e^{-\frac{i}{2}\int d^4x [(\phi + K^{-1}J)K(\phi + K^{-1}J)]}$$

8-12

Vediamo inoltre che l'integrale sulle possibili configurazioni del campo è indipendente da J e contribuisce al risultato con una costante, come risulta evidente operando la sostituzione:

$$\phi \to \phi' = \phi + K^{-1}J$$

8-13

Tale costante non ha significato fisico, poiché tutte le quantità osservabili saranno definite come rapporti di funzionali, normalizzati dividendo per $Z[0]$. Pertanto verrà eliminata quando dovremo introdurre un opportuno denominatore per il calcolo delle quantità di interesse. In definitiva ciò che contribuisce è:

$$Z[J] = e^{+\frac{i}{2}\int d^4x (K^{-1}JKK^{-1}J)}$$

8-14

Operando una doppia integrazione per parti (una per derivata), come per il caso 8-10:

$$\int d^4x (K^{-1}JKK^{-1}J) = \int d^4x (JK^{-1}J)$$

8-15

In definitiva:

$$Z[J] = e^{+\frac{i}{2}\int d^4x(JK^{-1}J)}$$
8-16

L'operatore K^{-1}, inverso dell'operatore differenziale K è ovviamente un operatore integrale: questo definisce una funzione a due punti che misura la risposta del campo in un punto x a una sorgente localizzata in y. Questa funzione prende il nome di propagatore. Anticipando il risultato utilizziamo una nomenclatura familiare (il segno meno è introdotto per riprodurre l'usuale convenzione sul segno della funzione Δ_F):

$$[K^{-1}J](x) = -\int d^4y\Delta_F\,(x-y)J(y)$$
8-17

Per sua definizione vale ovviamente:

$$K[K^{-1}J](x) = J(x)$$
8-18

Pertanto:

$$K\Delta_F(z) = -\delta^4(z)$$
8-19

Nel risolvere l'equazione precedente dobbiamo fare un passo indietro e osservare che nella manipolazione degli integrali ci si imbatte spesso in quantità di modulo unitario come *exp[iS]*, per cui deve essere dato un criterio di operatività per evitare di trattare divergenze. In altre parole, la presenza di fattori oscillanti del tipo e^{iS} rende gli integrali funzionali mal definiti dal punto di vista della convergenza. Per dare un significato operativo all'integrale si introduce allora una prescrizione causale che equivale a una rotazione complessa del tempo, nota come rotazione di Wick.A tal proposito è possibile operare un cambio di variabile:

$$t = (1 - i\chi)\tau$$
8-20

In tal modo viene assegnata al tempo piccola parte complessa (negativa) su cui si effettuerà successivamente il limite. In termini di differenziali:

$$\begin{aligned}
&dt = (1 - i\chi)d\tau \\
&\frac{d}{dt} = \frac{d}{(1 - i\chi)d\tau} \approx (1 + i\chi)\frac{d}{d\tau} \\
&\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2}{(1 - i\chi)^2 d\tau^2} \approx (1 + 2i\chi)\frac{d^2}{d\tau^2}
\end{aligned}$$
8-21

Nella derivata seconda è stato trascurato il termine di ordine superiore al primo in χ. Applicando all'operatore *K* si ottiene:

$$K = (1 + 2i\chi)\partial_\tau^2 - \nabla^2 + m^2$$

8-22

Operando la trasformata di Fourier per passare al dominio del quadrimpulso si ottiene in modo rapido:

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

8-23

Scriveremo in definitiva:

$$Z[J] = e^{-\frac{i}{2}\iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)}$$

8-24

Dalla derivata funzionale alle funzioni di Green

Fin qui abbiamo già fatto abbondantemente uso dei funzionali, come l'azione stessa o il funzionale generatore. Formalmente si può definire funzionale una corrispondenza *F* che associa ad ogni funzione *f* un numero (reale o complesso). Se *A* è lo spazio delle funzioni:

$$F: A \ni f \to F[f] \in \mathbb{R} \quad (\mathrm{o}\ \mathbb{C})$$

8-25

Introduciamo allora un ulteriore strumento fondamentale nella teoria: la derivata funzionale, ossia il tasso di variazione di *F[f]* in funzione di una piccola variazione della funzione *f*. In modo molto pratico possiamo considerare il caso più semplice possiamo, ossia quando la nuova *f** differisce da *f* solo in un punto *x* e per una quantità infinitesima. Questo si può implementare utilizzando una delta di Dirac e scriveremo allora:

$$\frac{\delta F}{\delta f(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F\big(f(z) + \varepsilon \delta(z-x)\big) - F(f)}{\varepsilon}$$

8-26

La derivata funzionale gioca, nella teoria di campo, lo stesso ruolo della derivata ordinaria in meccanica analitica: misura la risposta di un funzionale a una variazione infinitesima e localizzata del campo.

Applichiamo questo strumento al funzionale generatore:

$$i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\varepsilon}\left[\int d[\phi] e^{i\{S[\phi] - \int d^4x [J(x) + \varepsilon\delta(x-x_1)]\phi(x)\}} - \int d[\phi] e^{i\{S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x)\}}\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\varepsilon}\left[\int d[\phi] e^{i\{S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x)\}} e^{-i\varepsilon \int d^4x \delta^4(x-x_1)\phi(x)} - \int d[\phi] e^{i\{S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x)\}}\right]$$

8-27

Si sviluppa l'integrale che contiene la delta di Dirac, e si sviluppa l'esponenziale al primo ordine in ε:

$$e^{-i\varepsilon \int d^4x \delta^4(x-x_1)\phi(x)} = e^{-i\varepsilon\phi(x_1)} \approx 1 - i\varepsilon\phi(x_1)$$

8-28

Si ottiene quindi:

$$i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} = \int d[\phi]\phi(x_1)e^{i\{S[\phi]-\int d^4xJ(x)\phi(x)\}}$$

8-29

Allo stesso modo si può dimostrare:

$$i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)}i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} = \int d[\phi]\phi(x_2)\phi(x_1)e^{i\{S[\phi]-\int d^4xJ(x)\phi(x)\}}$$

8-30

Perché sono importanti questi risultati e le loro generalizzazioni a un numero arbitrario di derivazioni funzionali? Perché questi integrali sono legati alle funzioni di Green a più punti, che si definiscono come:

$$G(x_1,\dots,x_N) = \left\langle 0\middle|T\left(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}(x_N)\right)\middle|0\right\rangle = \frac{\int d[\phi]\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_N)e^{iS[\phi]}}{\int d[\phi]e^{iS[\phi]}} =$$
$$= i^N\frac{1}{Z[0]}\left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots\delta J(x_N)}\right]_{J=0}$$

8-31

In cui rappresenta il prodotto ordinato del tempo di operatori di campo ϕ, calcolato sullo stato fondamentale. Questa relazione è fondamentale perché il formalismo del cammino integrale traduce il calcolo degli operatori quantistici in un problema di integrazione funzionale. Il punto centrale del formalismo è quindi il fatto che le funzioni di Green, definite come valori di aspettazione di prodotti ordinati di operatori di campo, possono essere ottenute direttamente dal funzionale generatore tramite derivazione funzionale.

Per provare l'ultima relazione, partiamo dal risultato:

$$\langle\phi_f,t_f|\phi_i,t_i\rangle = C\int d[\phi]\,e^{i\int_{t_i}^{t_f}dt\int d^3xL}$$

8-32

Per semplicità ragioneremo con un reticolo discreto di punti, indicizzati con il pedice, fermo poi tornare al continuo con il passaggio al limite. Con l'apice invece denoteremo indici temporali, cosicché ϕ_j^k denota il valore del campo nel punto spaziale $\vec{x}_j$ al tempo k.

Se adesso vogliamo calcolare l'elemento di matrice dell'operatore $\hat{\phi}(x)$, con la solita idea di scomposizione in prodotto di un numero discreto di sottostep. Si verificherà dunque, per un certo $t = t_l$

$$\langle\phi_f,t_f|\hat{\phi}(x)|\phi_i,t_i\rangle = \lim\int\prod_{j,k}d\phi_j^k\,\langle\phi_{fj},t_f|\phi_j^M,t_M\rangle\dots\langle\phi_j^{l+1},t_{l+1}|\hat{\phi}(x)|\phi_j^l,t_l\rangle\dots\langle\phi_j^1,t_1|\phi_{ij},t_i\rangle$$

8-33

Poiché $\hat{\phi}(x)|\phi_j^l,t_l\rangle = \phi_j^l|\phi_j^l,t_l\rangle$ si ha quindi:

$$\langle \phi_f, t_f | \hat{\phi}(x) | \phi_i, t_i \rangle = C \int d[\phi] \phi(x)\, e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x L}$$

8-34

Calcoliamo adesso il prodotto matriciale di due campi a due tempi diversi. Per prima cosa consideriamo il caso $t_1 = t_k > t_2 = t_l$:

$$\begin{aligned}
&\langle \phi_f, t_f | \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) | \phi_i, t_i \rangle \\
&= \lim \int \prod_{j,n} d\phi_j^n \, \langle \phi_{fj}, t_f | \phi_j^M, t_M \rangle \dots \langle \phi_j^{k+1}, t_{k+1} | \hat{\phi}(x_1) | \phi_j^k, t_k \rangle \dots \langle \phi_j^{l+1}, t_{l+1} | \hat{\phi}(x_2) | \phi_j^l, t_l \rangle \dots \langle \phi_j^1, t_1 | \phi_{ij}, t_i \rangle \\
&= C \int d[\phi] \phi(x_1)\phi(x_2)\, e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x L}
\end{aligned}$$

8-35

Seguendo il medesimo schema si vede che nel caso in cui invece $t_2 > t_1$:

$$C \int d[\phi] \phi(x_1)\phi(x_2)\, e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x L} = \langle \phi_f, t_f | \hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_1) | \phi_i, t_i \rangle$$

8-36

In definitiva questo permette di giustificare l'introduzione del prodotto T-ordinato:

$$T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\right] = \begin{matrix} \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) \text{ se } t_1 > t_2 \\ \hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_1) \text{ se } t_2 > t_1 \end{matrix}$$

8-37

Possiamo anche scrivere, compattando l'espressione precedente:

$$T\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\right] = \theta(t_1 - t_2)\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) + \theta(t_2 - t_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_1)$$

8-38

Si può arrivare al caso di *N* operatori di campo per induzione:

$$\left\langle \phi_f, t_f \middle| T\left(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_N)\right) \middle| \phi_i, t_i \right\rangle = C \int d[\phi] \phi(x_1)\phi(x_2) \dots \phi(x_N)\, e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x L}$$

8-39

La dimostrazione deve però proseguire per arrivare al calcolo del valore di aspettazione di tale prodotto nello stato fondamentale. Per questo scopo cominciamo ad espandere gli autostati di $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t = 0)$ in autostati dell'energia.

$$\phi(\mathbf{x},t=0)\rangle = \sum_m |E_m\rangle\langle E_m|\,\phi(\mathbf{x},t=0)\rangle$$

8-40

Si ha allora:

$$|\phi_i,t_i\rangle = e^{-iHt_i}\phi_i(\mathbf{x},t=0)\rangle = e^{-iHt_i}\sum_m |E_m\rangle\langle E_m|\,\phi_i(\mathbf{x},0)\rangle = \sum_m e^{-iE_m t_i}|E_m\rangle\langle E_m|\,\phi_i(\mathbf{x},0)\rangle$$

$$\langle\phi_f,t_f| = \langle\phi_f(\mathbf{x},0)|e^{-iHt_f} = \sum_{m'}\langle\phi_f(\mathbf{x},0)|E_{m'}\rangle\langle E_{m'}|e^{-iHt_f} = \sum_{m'}\langle\phi_f(\mathbf{x},0)|E_{m'}\rangle\langle E_{m'}|e^{iE_{m'}t_f}$$

8-41

Utilizzando le relazioni

$$\left\langle\phi_f,t_f\middle|T\left(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\dots\hat\phi(x_N)\right)\middle|\phi_i,t_i\right\rangle$$
$$= \sum_{m,m'} e^{-iE_m t_i + iE_{m'}t_f}\langle\phi_f(\mathbf{x},0)|E_{m'}\rangle\left\langle E_{m'}\middle|T\left(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\dots\hat\phi(x_N)\right)\middle|E_m\right\rangle\langle E_m|\phi_i(\mathbf{x},0)\rangle$$

8-42

Compiamo adesso una rotazione di Wick sul tempo:

$$t_i \to -iT'$$
$$t_f \to iT'$$

8-43

Portando al limite per $T' \to \infty$ sopravvive solo l'energia dello stato fondamentale:

$$\left\langle\phi_f,t_f\middle|T\left(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\dots\hat\phi(x_N)\right)\middle|\phi_i,t_i\right\rangle$$
$$= \lim_{T'\to\infty}\sum_{m,m'} e^{-iE_m t_i + iE_{m'}t_f}\langle\phi_f(\mathbf{x},0)|E_{m'}\rangle\left\langle E_{m'}\middle|T\left(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\dots\hat\phi(x_N)\right)\middle|E_m\right\rangle\langle E_m|\phi_i(\mathbf{x},0)\rangle$$
$$= \langle\phi_f(\mathbf{x},0)|0\rangle\left\langle 0\middle|T\left(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\dots\hat\phi(x_N)\right)\middle|0\right\rangle\langle 0|\phi_i(\mathbf{x},0)\rangle =$$
$$= \langle\phi_f(\mathbf{x},0)|0\rangle\langle 0|\phi_i(\mathbf{x},0)\rangle\left\langle 0\middle|T\left(\hat\phi(x_1)\hat\phi(x_2)\dots\hat\phi(x_N)\right)\middle|0\right\rangle$$

8-44

Per contro allora si ha che:

$$\lim_{T'\to\infty} C \int d[\phi]\, e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3xL} = \langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle = \langle \phi_f(\mathbf{x},0)|0\rangle\langle 0|\phi_i(\mathbf{x},0)\rangle$$

8-45

Tale termine si può allora utilizzare al denominatore per eliminare la costante al di fuori dell'integrazione, ottenendo così:

$$\left\langle 0 \middle| T\left(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}(x_N)\right) \middle| 0 \right\rangle = \frac{\int d[\,\phi]\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_N)e^{iS[\phi]}}{\int d[\,\phi]e^{iS[\phi]}}$$

8-46

Il teorema di Wick

Mostriamo adesso un importante risultato per il calcolo della funzione di Green a più punti, particolarmente utile quando si intende ricorrere alla teoria delle perturbazioni per lo sviluppo di un termine di interazione. Partiamo dunque ancora dal funzionale generatore:

$$Z[J] = e^{-\frac{i}{2}\iint d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)} = e^{F[J]}$$

8-47

Per calcolarne la derivata funzionale di primo ordine dimostriamo *en passant* un risultato apparentemente familiare, mutuando dal caso della derivazione semplice:

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{F[J]} = e^{F[J]} \frac{\delta F[J]}{\delta J(x_1)}$$

8-48

La precedente formula trova giustificazione applicando la definizione di derivata funzionale data in precedenza:

$$\begin{aligned} i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)} &= i\frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{F[J]} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i}{\varepsilon}\left\{\exp\frac{-i}{2}\iint d^4xd^4y\,[J(x)+\varepsilon\delta(x-x_1)]\Delta_F(x-y)[J(y)+\varepsilon\delta(y-x_1)]\right. \\ &\left. -\exp\frac{-i}{2}\iint d^4xd^4y\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\quad\right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i}{\varepsilon}\left\{e^{F[J]}\exp\frac{-i}{2}\iint d^4xd^4y\,\varepsilon\delta(x-x_1)\Delta_F(x-y)J(y)\exp\frac{-i}{2}\iint d^4xd^4y\,\varepsilon J(x)\Delta_F(x\right. \\ &\left. -y)\varepsilon\delta(y-x_1)\exp o(\varepsilon^2) - e^{F[J]}\right\} \end{aligned}$$

8-49

Sviluppando gli argomenti dell'esponenziale:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i}{\varepsilon}\left\{e^{F[J]}\left(1-\varepsilon\frac{i}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)J(y)\right)\left(1-\varepsilon\frac{i}{2}\int d^4x\,J(x)\Delta_F(x-x_1)\right)-e^{F[J]}\right\}=$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)J(y)+\frac{1}{2}\int d^4x\,J(x)\Delta_F(x-x_1)\right\}e^{F[J]}$$

8-50

Quindi in definitiva:

$$\frac{1}{Z[0]}\left[i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\right]_{J=0}=\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)J(y)+\int d^4x\,\Delta_F(x-x_1)J(x_1)\right]e^{F[J]}\Big|_{J=0}=0$$

8-51

Si può applicare una seconda derivazione funzionale:

$$\left[i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)}\right]_{J=0}=i\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)}\left\{\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)J(y)+\int d^4x\,\Delta_F(x-x_1)J(x_1)\right]e^{F[J]}\right\}=$$
$$=\left[\frac{i}{2}\Delta_F(x_1-x_2)+\frac{i}{2}\Delta_F(x_2-x_1)\right]e^{F[J]}$$
$$+\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_1-y)J(y)+\int d^4x\,\Delta_F(x-x_1)J(x_1)\right]\left[\frac{1}{2}\int d^4y\,\Delta_F(x_2-y)J(y)\right.$$
$$\left.+\int d^4x\,\Delta_F(x-x_2)J(x_1)\right]e^{F[J]}=$$

8-52

Si arriva dunque a:

$$\frac{1}{Z[0]}\left[i^2\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right]_{J=0}=\frac{i}{2}\Delta_F(x_1-x_2)+\frac{i}{2}\Delta_F(x_2-x_1)=i\Delta_F(x_1-x_2)$$

8-53

In cui l’ultimo passaggio è verificato per la simmetria della funzione Δ_F. Ricordando quindi la 8-31 si ottiene ancora:

$$\left\langle 0\middle|T\left(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\right)\middle|0\right\rangle=\frac{1}{Z[0]}\left[i^2\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right]_{J=0}=i\Delta_F(x_1-x_2)$$

8-54

L’applicazione reiterata di operatori di derivazione funzionale può essere affrontata utilizzando una ricetta per il calcolo: con un po’ di pratica risulta evidente che sopravvivono esclusivamente i termini (con *N* pari) in cui compaiono prodotti di propagatori, risultato noto come teorema di Wick:

$$\left\langle 0\middle|T\left(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\dots\hat{\phi}(x_N)\right)\middle|0\right\rangle = i^N \sum_{\substack{\text{tutti i possibili}\\ \text{accoppiamenti}\\ \text{rimescolati}\\ \text{P di } k_1,\dots,k_N}} \Delta_F\left(x_{k_{P_1}} - x_{k_{P_2}}\right)\dots\Delta_F\left(x_{k_{P_{N-1}}} - x_{k_{P_N}}\right) =$$

$$= \sum_P \left\langle 0\middle|T\left(\hat{\phi}\left(x_{k_{P_1}}\right)\hat{\phi}\left(x_{k_{P_2}}\right)\right)\middle|0\right\rangle\dots\left\langle 0\middle|T\left(\hat{\phi}\left(x_{k_{P_{N-1}}}\right)\hat{\phi}\left(x_{k_{P_N}}\right)\right)\middle|0\right\rangle$$

8-55

Il teorema di Wick afferma quindi che, per una teoria libera, tutta l'informazione contenuta nelle funzioni di correlazione a più punti è già contenuta nel propagatore a due punti. Questo rende il propagatore l'oggetto fondamentale della teoria perturbativa.

La funzione di Green a due punti è detta anche contrazione: il teorema di Wick ci permette allora di esprimere prodotti ordinati di operatori di campo quantistico come combinazioni di contrazioni. Prendendo ad esempio la funzione a quattro punti:

$$\left\langle 0\middle|T\left(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_3)\hat{\phi}(x_4)\right)\middle|0\right\rangle = -\{\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)\}$$

8-56

Lo sviluppo perturbativo

L'introduzione di un termine di interazione rompe la gaussianità del funzionale generatore. Tuttavia, se l'interazione è sufficientemente debole, è possibile trattarla come una perturbazione attorno alla teoria libera.

A tal proposito, consideriamo un termine di interazione rappresentato da una funzione espandibile in una serie di potenze:

$$V(\phi) = gf(\phi) = g\sum_{j=1} \frac{1}{j!} a_j \phi^j$$

8-57

Dove si è eliminato il termine costante, in quanto ininfluente. g è un parametro noto come costante di interazione, e determina l'intensità dell'interazione, e a_j sono notoriamente i coefficienti dello sviluppo di Taylor.

La Lagrangiana sarà quindi esprimibile come somma dei termini di Lagrangiana libera e del termine perturbativo:

$$L = L_0 - V(\phi)$$

8-58

Cosicché anche il funzionale generatore diventa:

$$Z[J] = \int d[\phi] e^{i\int d^4x [L_0 - V(\phi) - J(x)\phi(x)]}$$

8-59

Il funzionale generatore della teoria interagente può essere scritto come il prodotto del funzionale della teoria libera e di un termine esponenziale che contiene l'interazione. Questa separazione è alla base dello sviluppo perturbativo. È allora possibile espandere in serie il termine esponenziale di interazione:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int d[\phi] \left\{ \sum_n \frac{1}{n!} \left(-ig \int d^4x \sum_{j=1} \frac{1}{j!} a_j \phi^j \right)^n \right\} e^{i\int d^4x [L_0 - J(x)\phi(x)]} \\ &= \int d[\phi] \left\{ \sum_n \frac{1}{n!} \left(-ig \int d^4x \sum_{j=1} \frac{1}{j!} a_j \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^j \right)^n \right\} e^{-\frac{i}{2}\iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} = \\ &= \left\{ \sum_n \frac{1}{n!} \left(-ig \int d^4x \sum_{j=1} \frac{1}{j!} a_j \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^j \right)^n \right\} Z_0[J] \end{aligned}$$

8-60

Dove si è posto:

$$Z_0[J] = \int d[\phi] e^{i\int d^4x [L_0 - J(x)\phi(x)]} = e^{-\frac{i}{2}\iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)}$$

8-61

Ogni termine della serie rappresenta un contributo di ordine crescente nella costante di accoppiamento. In questo modo, il calcolo delle funzioni di Green viene ricondotto alla valutazione di valori di aspettazione nella teoria libera. Si ha pertanto:

$$Z[J] = \exp\left\{ -i \int d^4x \, V\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} Z_0[J]$$

8-62

Questo formalismo ci permette di scrivere in modo sistematico i contributi perturbativi alle funzioni di correlazione usando il teorema di Wick. In questo modo, il formalismo del cammino integrale fornisce una struttura unitaria che collega lagrangiana, propagatori, funzioni di Green e sviluppo perturbativo, ponendo le basi per lo studio delle teorie di campo interagenti.

La teoria ϕ^3

Consideriamo ora una teoria di campo scalare con un termine di interazione cubico. Questa scelta, pur non descrivendo una teoria fisicamente realistica (poiché il potenziale non è limitato inferiormente e pertanto non risulta stabile dal punto di vista energetico), è estremamente utile dal punto di vista didattico: rappresenta il più semplice esempio di teoria interagente non banale. Introduciamo dunque un'interazione descritta dal potenziale:

$$V(\phi) = g\frac{\phi^3}{3!}$$

8-63

In questo caso il termine interattivo è quindi rappresentato da una funzione semplice, ossia da un monomio di terzo grado in ϕ, e questo semplifica molto le cose. Espandendo allora in serie l'esponenziale:

$$Z[J] = \sum_n \frac{1}{n!}\left\{\frac{-ig}{3!}\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3\right\}^n Z_0[J]$$
$$\approx \left\{1 + \frac{g}{3!}\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{3!}\right)^2\left[\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3\right]^2 + O(g^3)\right\} Z_0[J]$$

8-64

Poiché la parte libera della teoria è gaussiana, i valori di aspettazione dei prodotti di campi che compaiono nell'espansione perturbativa possono essere calcolati sistematicamente mediante il teorema di Wick. Nel caso della teoria ϕ^3, ogni termine non nullo deve contenere un numero pari totale di campi, affinché le contrazioni siano possibili.

Il primo contributo non nullo alle funzioni di Green compare al secondo ordine nella costante di accoppiamento, ed è associato a configurazioni in cui i campi del termine di interazione vengono completamente contratti.

Ogni schema di contrazione individuato dal teorema di Wick può essere rappresentato graficamente mediante un diagramma, in cui le contrazioni sono associate a propagatori e i termini di interazione a vertici.

Bibliografia

[1] T. Muta, “Foundations of Quantum Chromodynamics”, World Scientific,2010

[2] J. Zinn-Justin, “Path Integrals in Quantum Mechanics”, Oxford University Press, 2005

[3] N. Cabibbo, L. Maiani, O. Benhar, “Introduzione alle teorie di gauge”, Editori Riuniti, 2016

[4] D. Antonov, “Nonperturbative methods in gauge theories”, Pisa University Press, 2013

Indice delle voci